ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

"Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] τότε, το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες x=α, x=β είναι: $E = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{e^x}$

A Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της, τις ρίζες της καθώς και το πρόσημό της.

B Αν $F(x) = \int_{\frac{1}{4}}^{x} \sqrt{t}\, e^t f(t)dt$, τότε:

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F και να εξετάσετε αυτήν ως προς τη μονοτονία.

β. Να δείξετε ότι $F(x) > 0$, για $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από τη C_F, τον άξονα y΄y και την ευθεία $x = \frac{1}{4}$

Λύση

A. Η f ορίζεται στο $[0,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}e^x - \left(2\sqrt{x}-1\right)e^x}{e^{2x}} = \frac{1}{e^x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}+1\right) = \frac{1}{e^x\sqrt{x}}\left(1-2x+\sqrt{x}\right) = -\frac{2}{e^x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{x}-1\right),$$ οπότε

για $x > 0$, έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Συνεπώς η f (συνεχής στο $[0,+\infty)$) είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Ακόμη η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x_0 = 1$, το $f(1) = \frac{1}{e}$. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}-1}{e^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}e^x} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}e^x\right) = +\infty$ και $f(0) = -1$, άρα $f(0)$ ολικό ελάχιστο.

Αν $A_1 = [0,1]$, $A_2 = (1,+\infty)$, τότε $f(A_1) = \left[-1, \frac{1}{e}\right]$, $f(A_2) = \left(0, \frac{1}{e}\right)$. Οπότε: $f([0,+\infty)) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[-1, \frac{1}{e}\right]$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \in A_1$, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα η $x = \frac{1}{4}$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. Για $x \in A_1$, έχουμε $f(x) < 0$ όταν $0 \le x < \frac{1}{4}$ και $f(x) > 0$ όταν $\frac{1}{4} < x \le 1$

Για $x \in A_2$, έχουμε $f(x) > 0$ αφού $f(A_2) = \left(0, \frac{1}{e}\right)$

B. α. Η $\varphi(t) = \sqrt{t}e^t f(t)$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $\frac{1}{4} > 0$, οπότε η F έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ ως αρχική της $\varphi(x)$ με $F'(x) = \sqrt{x}\, e^x f(x)$

Είναι $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\, e^x f(x) = 0$, άρα x=0 ή $f(x) = 0 \overset{A.}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{4}$ και $F'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \overset{A.}{\Leftrightarrow} x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

Συνεπώς η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ (F συνεχής σ΄ αυτά).

β. Είναι: $F\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ και $F(0) = \int_{\frac{1}{4}}^{0} \sqrt{x}e^x f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}e^x\left(-f(x)\right)dx > 0$, αφού για $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, είναι $f(x) \le 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=$\frac{1}{4}$. Ακόμη η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ και συνεχής σ΄ αυτό, άρα $F(x) > 0$, για $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$

γ. Από β. $F(x) > 0$, για $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ και $F\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, άρα $E = \int_0^{\frac{1}{4}} F(x)dx = \int_0^{\frac{1}{4}} x'F(x)dx = \left[xF(x)\right]_0^{\frac{1}{4}} - \int_0^{\frac{1}{4}} x\sqrt{x}e^x f(x)dx$

$$= \frac{1}{4}F\left(\frac{1}{4}\right) - \int_0^{\frac{1}{4}} x\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)dx = -\int_0^{\frac{1}{4}}\left(2x^2 - x\sqrt{x}\right)dx = -\frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^{\frac{1}{4}} + \frac{2}{5}\left[x^2\sqrt{x}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{80} - \frac{1}{96} = \frac{1}{480}\text{ τ.μ.}$$

Θέμα 2°

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f^3(x) - x = \left(e^2 - 8\right)f(x) + 8e$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι:

i) Η f αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε την f^{-1}

ii) Το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=-e$, ισούται με $16e^2$ τετρ.μονάδες

β. Αν $G(x)=\int_0^x \frac{1}{3f^2(t)+8-e^2}dt$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε:

i) $f(1)-e=f'(x_0)$, ii) $K>f'(x_0)$, όπου K το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_φ με $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x+8e}$, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$

Λύση

α. i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επομένως η συνάρτηση $f^3(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Άρα, παραγωγίζοντας τη σχέση της υπόθεσης, έχουμε: $\left(f^3(x)-x\right)'=\left[\left(e^2-8\right)f(x)+8e\right]'$

$\Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)-1=\left(e^2-8\right)f'(x)\Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+8-e^2\right)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+8-e^2}>0,$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $\left(8>e^2\right)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως και «1 – 1», δηλαδή αντιστρέφεται. Θέτουμε στη σχέση της υπόθεσης $f(x) = y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και έχουμε:

$y^3-f^{-1}(y)=\left(e^2-8\right)y+8e \Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^3+\left(8-e^2\right)y-8e,\ y\in\mathbb{R}$, συνεπώς

$f^{-1}(x)=x^3+\left(8-e^2\right)x-8e,\ x\in\mathbb{R}$

ii) Είναι $f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow x^3+\left(8-e^2\right)x-8e=0 \Leftrightarrow x^3+8x-e^2x-8e=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-e^2\right)+8(x-e)=0 \Leftrightarrow$ $x(x+e)(x-e)+8(x-e)=0 \Leftrightarrow (x-e)\left(x^2+ex+8\right)=0$, άρα $x=e$, αφού $x^2+ex+8>0$ $(\Delta<0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για $x\in[-e,e]$ η f^{-1} είναι συνεχής ως πολυωνυμική και $f^{-1}(x)\le 0$ αφού $x\le e$, $x^2+ex+8>0$

Επομένως, $E=-\int_{-e}^{e}f^{-1}(x)dx=\int_{-e}^{e}\left[-x^3+\left(e^2-8\right)x+8e\right]dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{\left(e^2-8\right)x^2}{2}+8ex\right]_{-e}^{e}=\ldots=16e^2$ τ.μ.

β. i) Από ερώτημα αi) έχουμε: $f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+8-e^2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $\int_0^x\frac{1}{3f^2(t)+8-e^2}dt=\int_0^x f'(t)dt$

$\Leftrightarrow G(x)=\left[f(t)\right]_0^x \Leftrightarrow G(x)=f(x)-f(0)=f(x)-e$ (αφού $f^{-1}(e)=0 \Leftrightarrow f(0)=e$). Η G είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ (αφού $G(x) = f(x)-e$ και f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) με $G'(x)=f'(x)$, επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., οπότε υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$G'(x_0)=G(1)-G(0)\Leftrightarrow f'(x_0)=G(1)\Leftrightarrow f(1)-e=f'(x_0),\left(G(0)=0,\ G(1)=f(1)-e\right)$

ii) Η σχέση $f^3(x)+\left(8-e^2\right)f(x)=x+8e$, για $x=-8e$ γίνεται: $f^3(-8e)+\left(8-e^2\right)f(-8e)=0$

$\Leftrightarrow f(-8e)\left(f^2(-8e)+8-e^2\right)=0$, άρα $f(-8e) = 0$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (από αi), επομένως η $x = -8e$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και για $x>-8e$ θα ισχύει $f(x) > 0$

Συνεπώς για $x\in[0, 1]$ είναι $\varphi(x)=\frac{f(x)}{x+8e}>0$ και φ συνεχής, άρα $K=\int_0^1\varphi(x)dx$, (1)

Όμως, $f^3(x)+\left(8-e^2\right)f(x)=x+8e$, άρα $f(x)\left(f^2(x)+8-e^2\right)=x+8e \overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow} \frac{1}{f^2(x)+8-e^2}=\frac{f(x)}{x+8e}$, (2)

Ακόμη $\frac{1}{f^2(x)+8-e^2}-\frac{1}{3f^2(x)+8-e^2}>0$, (3). Από (3) για $x\in[0,1]$ θα ισχύει:

$\int_0^1\frac{1}{f^2(x)+8-e^2}dx>\int_0^1\frac{1}{3f^2(x)+8-e^2}dx \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \int_0^1\frac{f(x)}{x+8e}dx>\int_0^1 f'(x)dt \Leftrightarrow \int_0^1\varphi(x)dx>f(1)-f(0)$

$\Leftrightarrow K>f'(x_0)$, (από βi)

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ (β΄μισό 4ου - αρχές 3ου αι. π.Χ)

Κορυφαίος μαθηματικός της αρχαιότητας, ο θεμελιωτής των μαθηματικών ως καθαρά αποδεικτικής επιστήμης, που επηρέασε με το έργο του σε ύψιστο βαθμό τον επιστημονικό τρόπο σκέψης σε ολόκληρο τον κόσμο. Το σημαντικότερο γραπτό έργο του είναι αυτό με τίτλο «Στοιχεία», που αποτελείται από 13 βιβλία, τα οποία έχουν όλα μορφή καθαρά γεωμετρική. Αμιγώς αριθμοθεωρητικά στο περιεχόμενό τους, με περίβλημα πάντως γεωμετρικό είναι μόνο τα 7ο-9ο. Τα πρώτα έξι βιβλία αναφέρονται αποκλειστικά στην επιπεδομετρία, με το 2ο να περιλαμβάνει πάντως προτάσεις καθαρά αλγεβρικής φύσης, στο 10ο υπάρχει μια αριθμο-γεωμετρική ανάμειξη, ενώ τα δυο τελευταία βιβλία είναι αφιερωμένα στη στερεομετρία. Όλο το σύγγραμμα των «Στοιχείων» εδράζεται πάνω σε «όρους», «κοινές έννοιες» και «αιτήματα». Ανάμεσα στα «αιτήματα» υπάρχει και το περίφημο «5ο αίτημα» περί της παραλληλίας (από ένα σημείο μπορούμε να φέρουμε μόνο μια παράλληλη ευθεία προς μια άλλη δοσμένη), που ταλαιπώρησε επί πολλές αιώνες γενιές και γενιές μαθηματικών για να το αποδείξουν. Από τον 19ο αιώνα οι Λομπατσέφσκι, Ρίμαν, Γκάους, ανεξαρτητοποίησαν το «5ο αίτημα» από τα υπόλοιπα και σχεδίασαν τις νέες όχι ευκλείδειες γεωμετρίες…Η πρώτη καθαρά συμπερασματική κατασκευή της ευκλείδειας γεωμετρίας δόθηκε το 1899 από τον Ντάβιντ Χίλμπερτ. Ο Ευκλείδης και τα «Στοιχεία» του εξακολουθούν ακόμα και σήμερα να καθοδηγούν τη μαθηματική σκέψη με φιλοσοφικό μάλιστα υπόβαθρο.