ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΚΟΚΟΛΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΥΡΙΑΚΟΥΛΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΜΑΡΙΝΗΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΥΡΙΑΖΗΣ

- Αν f συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ και $\alpha\in\Delta$ τότε: $\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.
- Αν f συνεχής συνάρτηση σε διάστημα [α,β] και G μια παράγουσα της f στο [α,β] τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx=G(\beta)-G(\alpha)$.

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ-Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$

Θέμα 1ο

Έστω συνάρτηση $f:\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)\to\mathbb{R}^*$ παραγωγίσιμη, για την οποία: $2xf'(x)+f^2(x)=0$ για κάθε $x>\frac{1}{e^2}$ και $f(1)=1$.

α) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f και f^{-1}.

β) Αν g συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [1, 2] με σύνολο τιμών το διάστημα [1, 3], να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2-\int_1^x \ell nf^{-1}(t)\frac{g(t)}{2}dt=3$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα (1, 2).

Λύση

α) Για κάθε $x>\frac{1}{e^2}$ ισχύει $2xf'(x)+f^2(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{1}{2x}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\left(\frac{1}{2}\ell nx\right)'$ (1) αφού $f(x)\neq0$ και $x>\frac{1}{e^2}>0$. Οι συναρτήσεις $\frac{1}{f(x)},\frac{1}{2}\ell nx$ είναι συνεχείς στο $\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$, άρα από (1) έχουμε: $\frac{1}{f(x)}=\frac12\ell nx+c$ (2), $c\in\mathbb{R}$. Όμως $f(1)=1$ επομένως για $x=1$ από (2) έχουμε $\frac{1}{f(1)}=\frac12\ell n1+c\Leftrightarrow c=1$, άρα $\frac{1}{f(x)}=\frac12\ell nx+1\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{2+\ell nx}, x>\frac{1}{e^2}$.

Για κάθε $x>\frac1{e^2}$ είναι $f'(x)=-\frac{f^2(x)}{2x}<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ αφού είναι και συνεχής σ' αυτό ως παραγωγίσιμη και συνεπώς θα είναι '1-1' δηλαδή θα αντιστρέφεται.

Για κάθε $x>\frac1{e^2}$ θέτουμε $f(x)=\psi\Leftrightarrow\frac{2}{2+\ell nx}=\psi>0$ αφού $x>\frac1{e^2}\Leftrightarrow \ell nx>\ell n\frac1{e^2}\Leftrightarrow\ell nx+2>0$.

Έτσι $x=f^{-1}(\psi)$ και από $\frac{2}{2+\ell nx}=\psi\Leftrightarrow 2+\ell nx=\frac2\psi\Leftrightarrow\ell nx=\frac2\psi-2\Leftrightarrow x=e^{\frac2\psi-2}$ θα έχουμε $f^{-1}(\psi)=e^{\frac2\psi-2},\psi>0$, οπότε $f^{-1}(x)=e^{\frac2x-2}, x>0$.

β) Είναι $\ell nf^{-1}(x)=\ell ne^{\frac2x-2}=\frac2x-2$ άρα $x^2-\int_1^x\ell nf^{-1}(t)\frac{g(t)}{2}dt=3\Leftrightarrow x^2-\int_1^x\left(\frac1t-1\right)g(t)dt-3=0$. Έτσι θεωρώντας τη συνάρτηση $h(x)=x^2-\int_1^x\left(\frac1t-1\right)g(t)dt-3, x\in[1,2]$ αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (1,2). Οι συναρτήσεις $\frac1x-1, g(x)$ είναι συνεχείς στο [1,2], άρα η συνάρτηση $\int_1^x\left(\frac1t-1\right)g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της $\left(\frac1x-1\right)g(x)$ στο [1,2].

Έτσι η h είναι παραγωγίσιμη στο [1,2] (x^2 -3:παραγωγίσιμη) ,με $h'(x)=2x-\left(\frac1x-1\right)g(x)$.

Για $x\in[1,2]$ έχουμε $\frac12\le\frac1x\le1\Leftrightarrow -\frac12\le\frac1x-1\le0$ και $1\le g(x)\le3$, άρα $2x-\left(\frac1x-1\right)g(x)>0$, δηλ. $h'(x)>0$ και επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο [1,2] αφού είναι και συνεχής σ' αυτό.

Η h είναι συνεχής στο [1,2] και $h(1)=-2<0$.

Ακόμη $h(2)=1-\int_1^2\left(\frac1t-1\right)g(t)dt>0$ αφού $-\left(\frac1t-1\right)g(t)\ge0$ για $t\in[1,2]$ (αναφέρθηκε παραπάνω) και $x\in[1,2]$.

Συνεπώς $h(1)h(2)<0$,άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(1,2)$, τέτοιο, ώστε h(ρ) = 0. Το ρ είναι μοναδικό αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο [1,2].

Θέμα 2ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f(3) = – 2.

Να δείξετε ότι:

i) **α)** Η συνάρτηση $g(x)=\int_3^x f(t)dt$ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, **β)** Ισχύει g(x) < 6 – 2x, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $x\neq3$.

ii) Αν $\mu > 3$ τότε $2\int_3^{\mu} f(t)dt < (\mu-3)\int_1^3 f(t)dt$.

iii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \geq 3$ ισχύουν:

α) $\int_x^3\left(\int_3^u f(t)dt\right)du \geq (x-3)^2$, **β)** $\int_3^x (x-t)f(t)dt + (x-3)^2 \leq 0$.

Λύση

i) **α)** Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη άρα η g είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της f με $g'(x) = f(x)$.

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτό άρα θα ισχύει $g''(x) = f'(x) < 0$ (υπόθεση).

Έτσι αφού $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ (g συνεχής στο $\mathbb{R}$).

β) Είναι $g(3) = \int_3^3 f(t)dt = 0$ και $g'(3) = f(3) = -2$ (υπόθεση), άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο (3, g(3)) είναι $y - g(3) = g'(3)(x-3)$ και γράφεται ισοδύναμα $y = -2(x-3) \Leftrightarrow y = 6-2x$.

Η ευθεία ε: y = 6 – 2x θα βρίσκεται ''πάνω'' από τη C_g σε κάθε σημείο αυτής (αφού g κοίλη) εκτός του σημείου (3, 0) στο οποίο θα ταυτίζονται.

Οπότε θα ισχύει $g(x) < 6 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 3$.

ii) Για $\mu > 3$ η σχέση $2\int_3^{\mu} f(t)dt < (\mu-3)\int_1^3 f(t)dt$. γράφεται:

$$\frac{\int_3^{\mu} f(t)dt}{\mu-3} < \frac{\int_1^3 f(t)dt}{2} \overset{\text{i) α)}}{\Leftrightarrow} \frac{\int_3^{\mu} g'(t)dt}{\mu-3} < \frac{\int_1^3 g'(t)dt}{2} \Leftrightarrow \frac{[g(t)]_3^{\mu}}{\mu-3} < \frac{[g(t)]_1^3}{2} \Leftrightarrow \frac{g(\mu)-g(3)}{\mu-3} < \frac{g(3)-g(1)}{2} \quad (1)$$

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη) άρα και στα διαστήματα [1, 3], [3, μ].
Ακόμη η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στα διαστήματα (1, 3), (3, μ), επομένως για την g ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (1,3)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (3,\mu)$, τέτοια, ώστε

$$g'(\xi_1) = \frac{g(3)-g(1)}{3-1} \quad \text{και} \quad g'(\xi_2) = \frac{g(\mu)-g(3)}{\mu-3}.$$

Συνεπώς η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται: $g'(\xi_2) < g'(\xi_1)$ με $\xi_2 > \xi_1$ που ισχύει αφού η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ (αφού $g''(x) < 0$).

iii) **α)** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \geq 3$ θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \int_3^x\left(\int_3^u f(t)dt\right)du + (x-3)^2$.

Η $g(u) = \int_3^u f(t)dt$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη, άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο $[3,+\infty)$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων $\int_3^x\left(\int_3^u f(t)dt\right)du$ (αρχική της g(u)) και $(x-3)^2$ με

$$h'(x) = \left(\int_3^x g(u)du\right)' + \left[(x-3)^2\right]' = g(x) + 2(x-3) < 0 \ (\text{ από i)β) }) \ \text{ ενώ } h'(3) = 0.$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[3,+\infty)$ αφού είναι και συνεχής σε αυτό ως παραγωγίσιμη.

Συνεπώς για $x \geq 3$ θα ισχύει

$$h(x) \leq h(3) \Leftrightarrow \int_3^x\left(\int_3^u f(t)dt\right)du + (x-3)^2 \leq \int_3^3\left(\int_3^u f(t)dt\right)du + 0 \Leftrightarrow \int_3^x\left(\int_3^u f(t)dt\right)du + (x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\int_x^3\left(\int_3^u f(t)dt\right)du + (x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \int_x^3\left(\int_3^u f(t)dt\right)du \geq (x-3)^2, \ x \geq 3.$$

β) Από iii) α) για $x \geq 3$ ισχύει $\int_3^x\left(\int_3^u f(t)dt\right)du + (x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \int_3^x u'\left(\int_3^u f(t)dt\right)du + (x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\overset{\left(\int_3^u f(t)dt\right)' = f(u)}{\Leftrightarrow} \left[u\int_3^u f(t)dt\right]_3^x - \int_3^x uf(u)du + (x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x\int_3^x f(t)dt - 0 - \int_3^x uf(u)du + (x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_3^x xf(t)dt - \int_3^x tf(t)dt + (x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \int_3^x (x-t)f(t)dt + (x-3)^2 \leq 0, \ x \geq 3.$$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΖΙΛ ΑΝΡΙ ΠΟΥΑΝΚΑΡΕ (1854-1912)

Γάλλος μαθηματικός από το Νανσί, που μεγαλούργησε σαν καθηγητής-ερευνητής του Πανεπιστημίου του Παρισιού. Το έργο του στα Μαθηματικά σήμανε το τέλος της κλασικής εποχής στη συγκεκριμένη επιστήμη και άνοιξε το δρόμο στην ανάπτυξη των σύγχρονων μαθηματικών, στα οποία επιτυγχάνονται πια όχι μόνο ποσοτικά αλλά και ποιοτικά αποτελέσματα. Ο Πουανκαρέ ασχολήθηκε κυρίως με τις διαφορικές εξισώσεις και τις υπερβατικές συναρτήσεις. Το 1880 εξέδωσε μια σειρά άρθρων με τίτλο «Περί καμπυλών προσδιοριζομένων υπό διαφορικών εξισώσεων». Αργότερα οδηγήθηκε στη μελέτη νέων κλάσεων υπερβατικών συναρτήσεων, οι οποίες ονομάζονται αυτομορφικές συναρτήσεις. Απέδειξε με αυτές ένα θεώρημα πρόσθεσης, με βάση το οποίο οι αλγεβρικές καμπύλες μπορούσαν να ομοιομορφοποιηθούν. Έτσι έγινε βασικός θεμελιωτής νόμων της τοπολογίας, αφού οι τύποι της μελετητικής του ομάδας όρισαν τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών των πλευρών, των κορυφών και των εδρών ενός πολυδιάστατου πολυτόπου. Σημαντική υπήρξε η συμβολή του και στη μαθηματική φυσική με τις έρευνες για τις ταλαντώσεις τρισδιάστατων συνεχών μέσων.