Γ' ΕΠΑΛ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΒΛΑΧΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΔΙΟΛΙΤΣΗΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ

- Αν E(x), K(x), P(x) οι συναρτήσεις εσόδων, κόστους, κέρδους αντιστοίχως, τότε: $P(x)=E(x)-K(x)$
- Μέσο κόστος: $K_\mu(x)=\frac{K(x)}{x}$
- Οριακό κόστος: $K'(x)$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1° Θέμα

Ο παρακάτω (ελλιπής) πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των απουσιών (x_i), που έκαναν σε μια σχολική χρονιά οι μαθητές ενός φροντιστηρίου ξένων γλωσσών.

Αριθμός απουσιών x_i	v_i	$x_i v_i$
2		8
4		32
x_3		
6		36
8		64
x_6		40
Σύνολο		230

α) Αν το εύρος R είναι 8 και η μέση τιμή 5,75, να βρείτε την τιμή x_6 καθώς και τον αριθμό των μαθητών του φροντιστηρίου.

β) Να συμπληρώσετε την στήλη των συχνοτήτων (v_i) και να προσθέσετε στήλες με τη σχετική συχνότητα % καθώς και με την αθροιστική συχνότητα (N_i) και σχετική αθροιστική συχνότητα (F_i%)

γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

δ) Να βρείτε:
 i) τον αριθμό των μαθητών που έκαναν το πολύ έως και 8 απουσίες
 ii) το ποσοστό των μαθητών που έκαναν τουλάχιστον 6 απουσίες

Λύση

α) Είναι $R=x_6-x_1 \Leftrightarrow 8=x_6-2 \Leftrightarrow x_6=10$ απουσίες.

Επίσης, $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{6} x_i v_i}{v} \Leftrightarrow 5{,}75=\frac{230}{v} \Leftrightarrow v=\frac{230}{5{,}75} \Leftrightarrow v=40$ μαθητές.

β) $v_1=\frac{x_1 v_1}{x_1}=\frac{8}{2}=4$, $v_2=\frac{x_2 v_2}{x_2}=\frac{32}{4}=8$, $v_4=\frac{x_4 v_4}{x_4}=\frac{36}{6}=6$, $v_5=\frac{x_5 v_5}{x_5}=\frac{64}{8}=8$

και $v_6=\frac{x_6 v_6}{x_6}=\frac{40}{10}=4$, οπότε $v_3=v-(v_1+v_2+v_4+v_5+v_6)=40-(4+8+6+8+4)=10$

Ακόμη: $x_3 v_3=230-(8+32+36+64+40)=50$, άρα $x_3=\frac{x_3 v_3}{v_3}=\frac{50}{10}=5$

$N_1=v_1=4$, $N_2=N_1+v_2=4+8=12$, $N_3=N_2+v_3=12+10=22$, $N_4=N_3+v_4=22+6=28$

$N_5=N_4+v_5=28+8=36$ και $N_6=N_5+v_6=36+4=40$

$f_1\%=\frac{v_1}{v}\cdot 100=\frac{4}{40}\cdot 100=10$ και ομοίως βρίσκουμε:

$f_2\%=20, f_3\%=25, f_4\%=15, f_5\%=20, f_6\%=10$ και

$F_1\%=f_1\%=10, F_2\%=F_1\%+f_2\%=30$, ομοίως βρίσκουμε: $F_3\%=55$, $F_4\%=70$, $F_5\%=90$, $F_6\%=100$

Έτσι έχουμε τον πιο κάτω πίνακα:

x_i	v_i	$x_i v_i$	N_i	f_i%	F_i%
2	4	8	4	10	10
4	8	32	12	20	30
5	10	50	22	25	55
6	6	36	28	15	70
8	8	64	36	20	90
10	4	40	40	10	100
Σύνολο	40	230	–	100	–

γ) Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι άρτιος αριθμός (40), η διάμεσος θα είναι ίση με το ημιάθροισμα της $20^{ης}$ και της $21^{ης}$ παρατήρησης, οπότε έχουμε: $\delta=\frac{5+5}{2}=5$ απουσίες.

Η μεγαλύτερη τιμή των v_i είναι 10 και σε αυτήν αντιστοιχεί η τιμή $x_3=5$ η οποία είναι και η επικρατούσα τιμή.

δ) i) Μέχρι και 8 απουσίες έκαναν $N_5=36$ μαθητές

ii) Το ποσοστό των μαθητών που έκαναν τουλάχιστον 6 απουσίες είναι ίσο με $(100-F_3)\%=(100-55)\%=45\%$

2ο Θέμα

Το συνολικό κόστος K(x) (σε ευρώ) παραγωγής x ανταλλακτικών εξαρτημάτων την ημέρα από μια εταιρεία, δίνεται από τη συνάρτηση $K(x)=\frac{1}{3}x^3-12x^2+308x-504,\ 2\le x\le 20$. Η τιμή πώλησης του κάθε εξαρτήματος είναι 200 ευρώ και το ημερήσιο κέρδος της εταιρείας από τη πώληση x εξαρτημάτων δίνεται από τη συνάρτηση P(x) = E(x) – K(x), όπου E(x) τα έσοδα της εταιρίας από την πώληση x εξαρτημάτων.

α Να βρείτε πόσο κοστίζει η παραγωγή του 4ου εξαρτήματος.

β Ποια είναι η συνάρτηση του μέσου κόστους($K_\mu(x)=\frac{K(x)}{x}$); Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μέσου κόστους ως προς x, όταν η εταιρεία παράγει έξι εξαρτήματα την ημέρα.

γ Να βρείτε τη συνάρτηση $E(x)$ των εσόδων της εταιρείας από τη πώληση x εξαρτημάτων.
Ποιο είναι το κέρδος που προκύπτει από την πώληση εννέα εξαρτημάτων;

δ Να βρείτε πόσα εξαρτήματα πρέπει να παράγει η εταιρεία ημερησίως, ώστε το κέρδος να γίνεται μέγιστο.

Λύση

α Η παραγωγή του 4ου εξαρτήματος κοστίζει $K(4)-K(3)$, όπου:

$$K(4)=\frac{1}{3}\cdot 4^3-12\cdot 4^2+308\cdot 4-504=\frac{64}{3}-192+1232-504=\frac{64}{3}+536 \text{ ευρώ}$$

και $K(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-12\cdot 3^2+308\cdot 3-504=9-108+924-504=321$ ευρώ, άρα:

$$K(4)-K(3)=\frac{64}{3}+536-321=\frac{64}{3}+215 \text{ ευρώ.}$$

β Το μέσο κόστος είναι:

$$K_\mu(x)=\frac{K(x)}{x}=\frac{\frac{1}{3}x^3-12x^2+308x-504}{x} \quad \text{άρα} \quad K_\mu(x)=\frac{1}{3}x^2-12x+308-\frac{504}{x}$$

Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους είναι: $K'_\mu(x)=\left(\frac{1}{3}x^2-12x+308-\frac{504}{x}\right)'=\frac{2}{3}x-12+\frac{504}{x^2}$, άρα

$$K'_\mu(6)=\frac{2}{3}\cdot 6-12+\frac{504}{36}=4-12+14=6$$

γ Η συνάρτηση $E(x)$ που δίνει τα έσοδα από την πώληση των x εξαρτημάτων είναι: E(x) = 200x
Το κέρδος που προκύπτει από την πώληση των x εξαρτημάτων είναι:
P(x) = E(x) – K(x)

Άρα, $P(x)=200x-\left(\frac{1}{3}x^3-12x^2+308x-504\right) \Leftrightarrow P(x)=200x-\frac{1}{3}x^3+12x^2-308x+504 \Leftrightarrow$

$P(x)=-\frac{1}{3}x^3+12x^2-108x+504$, οπότε το κέρδος από την πώληση εννέα εξαρτημάτων είναι:

$$P(9)=-\frac{1}{3}\cdot 9^3+12\cdot 9^2-108\cdot 9+504=-243+972-972+504=261 \text{ ευρώ}$$

δ Έχουμε: $P(x)=-\frac{1}{3}x^3+12x^2-108x+504$, άρα $P'(x)=-x^2+24x-108$

$P'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+24x-108=0$, Δ = 576 – 432 = 144, άρα $x_{1,2}=\frac{-24\pm 12}{-2}=\begin{cases}6\\18\end{cases}$

$P'(x)>0 \Leftrightarrow -x^2+24x-108>0$

Για το πρόσημο του τριωνύμου έχουμε:

$-\infty$		6		18		$+\infty$
	–	0	+	0	–	

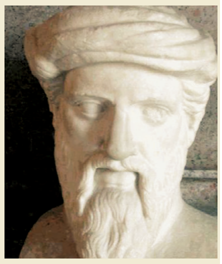
Αλλά $2\le x\le 20$, συνεπώς:

x	2	6	18	20
$P'(x)$	–		+	–
P(x)	↘		↗	↘
		ΕΛΑΧ.	ΜΕΓ.	

Άρα η εταιρεία πρέπει να κατασκευάζει 18 εξαρτήματα ημερησίως, ώστε να μεγιστοποιεί το κέρδος της (αφού P(2)=333,33<P(18)=504).

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ Ο ΣΑΜΙΟΣ (580-504 ή 496 π.Χ.)



Από τους κορυφαίους κατά τον Ηρόδοτο αρχαίους Έλληνες φιλοσόφους. Εξάλλου λέγεται ότι είναι ο πρώτος που ονόμασε τον εαυτό του «φιλόσοφο». Τα στοιχεία που έφτασαν σε μας για τη ζωή του αντικρούονται. Οι περισσότεροι, ωστόσο, μελετητές του αρχαίου ελληνικού κόσμου αποδίδουν στον Πυθαγόρα πρωτοπορειακή προαγωγή της επιστήμης των Μαθηματικών. Είναι γι αυτούς ο πατέρας της συστηματικής εισαγωγής των αποδείξεων στη Γεωμετρία και θεωρούν παιδιά του τη δημιουργία της επιπεδομετρίας, την απαρχή της θεωρίας της ομοιότητας, την απόδειξη του φερώνυμου Πυθαγορείου θεωρήματος, την κατασκευή ορισμένων κανονικών πολυγώνων και πολυέδρων, τις θεωρίες των αρτίων και περιττών αριθμών. Στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας, όπου έζησε την ωριμότητά του, ο Πυθαγόρας είχε ιδρύσει δικό του πολιτικοφιλοσοφικό σύστημα διακυβέρνησης («Πυθαγόρειος σύλλογος») στηριγμένο στα αξιώματα της αυταπάρνησης μεταξύ φίλων, της φιλανθρωπίας απέναντι σους δούλους, της ισότητας ανδρών-γυναικών όχι όμως και της ευρύτερης κοινωνικής ισονομίας...