# ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ

“ Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$



## ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**Θέμα 1°**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\sqrt{2}x+\left|\sqrt{2}-x\right|,\ x\in[0,5]$

α. Να βρείτε τις θέσεις των πιθανών τοπικών ακροτάτων της f

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ. Έστω συνάρτηση h παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $[0,\sqrt{2}]$, με σύνολο τιμών το $[0,\sqrt{2}]$
Να δείξετε ότι υπάρχει $\rho\in(0,\sqrt{2})$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(h(\rho))\cdot h'(\rho)=-1$

**Λύση**

α. Είναι $\sqrt{2}-x\ge 0\Leftrightarrow x\le\sqrt{2}$, οπότε:

Για $x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$, $f(x)=x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}-x \Leftrightarrow f(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$, ενώ για $x\in\left(\sqrt{2},5\right]$, έχουμε

$f(x)=x^2-\sqrt{2}x+x-\sqrt{2} \Leftrightarrow f(x)=x^2-\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}$. Επομένως $f(x)=\begin{cases}x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}, & x\in\left[0,\sqrt{2}\right]\\ x^2-\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}, & x\in\left(\sqrt{2},5\right]\end{cases}$

Οι θέσεις των πιθανών τοπικών ακροτάτων της $f(x)$, είναι:

- Τα άκρα 0 και 5 του διαστήματος [0, 5]
- Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος [0, 5], στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη.
- Οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$ στο διάστημα (0, 5)

Έχουμε $f'(x)=2x-\left(\sqrt{2}+1\right)$, $x\in\left[0,\sqrt{2}\right)$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-\left(\sqrt{2}+1\right)=0 \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\in\left(0,\sqrt{2}\right)$,(αφού $\sqrt{2}>1$). Άρα το $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ είναι θέση πιθανού τοπικού ακρότατου της f

Επίσης για $x\in\left(\sqrt{2},5\right]$, είναι $f'(x)=2x-\left(\sqrt{2}-1\right)$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-\left(\sqrt{2}-1\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\notin\left(\sqrt{2},5\right]$

(αφού $\sqrt{2}>-1$), άρα απορρίπτεται.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=\sqrt{2}$, αφού $\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+}f(x)=f\left(\sqrt{2}\right)=0$. Ακόμη:

$$\lim_{x\to(\sqrt{2})^-}\frac{f(x)-f\left(\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to(\sqrt{2})^-}\frac{x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to(\sqrt{2})^-}\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)(x-1)}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to(\sqrt{2})^-}(x-1)=\sqrt{2}-1,$$

ενώ,

$$\lim_{x\to(\sqrt{2})^+}\frac{f(x)-f\left(\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to(\sqrt{2})^+}\frac{x^2-\left(\sqrt{2}-1\right)x-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to(\sqrt{2})^+}\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)(x+1)}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to(\sqrt{2})^+}(x+1)=\sqrt{2}+1\ne\sqrt{2}-1$$

δηλαδή, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\sqrt{2}$. Επομένως, το $\sqrt{2}$ είναι θέση πιθανού τοπικού ακροτάτου της f. Συνεπώς οι θέσεις πιθανών τοπικών ακροτάτων της f είναι: 0, $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$, $\sqrt{2}$ ,5

β. Η f είναι συνεχής στο [0, 5] και δεν είναι σταθερή σ΄αυτό, οπότε θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.
Υπολογίζουμε τις τιμές των πιθανών ακροτάτων της f: $f\left(\sqrt{2}\right)=0$, $f(0)=\sqrt{2}$,

$$f\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)=\frac{3+2\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}+1}{2}+\left|\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right|=\ldots=\frac{2\sqrt{2}-3}{4},\quad f(5)=30-6\sqrt{2}$$

Επομένως $f_{μεγ.}=30-6\sqrt{2}$ και $f_{ελαχ..}=\dfrac{2\sqrt{2}-3}{4}<0$, άρα αν A = [0, 5] τότε $f(A)=\left[\dfrac{2\sqrt{2}-3}{4},\,30-6\sqrt{2}\right]$

γ. Επειδή το σύνολο τιμών της h είναι το $\left[0,\sqrt{2}\right]\subset[0,5]$, η συνάρτηση $f\circ h$ ορίζεται στο σύνολο:
$B=\left\{x\in D_h\ /\ h(x)\in D_f\right\}=\left[0,\sqrt{2}\right]$ και έχει τύπο $(f\circ h)(x)=f(h(x))=h^2(x)-\left(\sqrt{2}+1\right)h(x)+\sqrt{2}$ αφού για $x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$ είναι $f(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$. Άρα η $f\circ h$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\sqrt{2})$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και συνεχής στο $\left[0,\sqrt{2}\right]$ ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων h, f
Συνεπώς για τη $f\circ h$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in\left(0,\sqrt{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$(f\circ h)'(\rho)=\dfrac{(f\circ h)\left(\sqrt{2}\right)-(f\circ h)(0)}{\sqrt{2}}$, (1). Όμως $(f\circ h)'(x)=f'(h(x))\cdot h'(x)$, $(f\circ h)\left(\sqrt{2}\right)=f\left(h\left(\sqrt{2}\right)\right)=f\left(\sqrt{2}\right)=0$

και $(f\circ h)(0)=f(h(0))=f(0)=\sqrt{2}$, αφού στο $\left[0,\sqrt{2}\right]$ η h είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής ως παραγωγίσιμη με σύνολο τιμών το $[0,\sqrt{2}\,]$. Επομένως η (1) γίνεται $f'(h(\rho))\cdot h'(\rho)=-1$

**Θέμα 2°**

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{\lambda}{x}-2+e^{2x}$, $x>0$, $\lambda>0$ και η συνάρτηση h τέτοια ώστε: $h(x)+x^2f'(x)=0$, $x>0$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$

ii) Αν $h(1)=0$, να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών και το πρόσημό της.

iii) Για την f του ερωτήματος (ii), να δείξετε ότι:

α. Υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη στη $C_f$ στο σημείο $M(\rho,f(\rho))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $K(1,3e^2-2)$, $\Lambda(2,f(2))$

β. Ισχύει $f'\left(\frac{e}{2}-1\right)<e^2\left(e^2-2\right)<f'(e+1)$

**Λύση**

i) Για $x>0$ έχουμε $f'(x)=2e^{2x}-\frac{\lambda}{x^2}$, $\lambda>0$ και

$$h(x)+x^2f'(x)=0\Leftrightarrow h(x)+x^2\left(-\frac{\lambda}{x^2}+2e^{2x}\right)=0\Leftrightarrow h(x)=\lambda-2x^2e^{2x},\ \lambda>0$$

Οπότε $h'(x)=-4xe^{2x}-2x^2 2e^{2x}=-4xe^{2x}(1+x)<0$, για κάθε $x>0$, άρα η h είναι γν.φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

Ακόμη $\lim\limits_{x\to0}h(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\lambda-2x^2e^{2x}\right)=\lambda$, $\lambda>0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\lambda-2x^2e^{2x}\right)=-\infty$

Επομένως η συνεχής (πράξεις συνεχών) στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση h έχει σύνολο τιμών το $(-\infty,\lambda)$, $\lambda>0$

Είναι $0\in h(A)$ με $A=(0,+\infty)$, άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$ αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό.

ii) $h(1)=0\Leftrightarrow\lambda-2e^2=0\Leftrightarrow\lambda=2e^2$, συνεπώς $f(x)=\frac{2e^2}{x}-2+e^{2x}$, $x>0$ και $f'(x)=2e^{2x}-\frac{2e^2}{x^2}$, $x>0$

Η $f'$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\left(f'(x)\right)'=\left(2e^{2x}\right)'-2e^2\left(\frac{1}{x^2}\right)'=4e^{2x}+\frac{4e^2}{x^3}$

Επομένως $f''(x)>0$, για κάθε $x>0$, δηλαδή η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Είναι $h(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0$, άρα:

- Για $0<x<1$ έχουμε $f'(x)<f'(1)\Leftrightarrow f'(x)<0$ και f συνεχής στο $(0,1]$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$
- Για $x>1$ έχουμε $f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$ και f συνεχής στο $[1,+\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Συνεπώς η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=1$ το $f(1)=3e^2-2>0$

Ακόμη: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(e^{2x}-2+\frac{2e^2}{x}\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to0}\frac{2e^2}{x}=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-2+\frac{2e^2}{x}\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^2}{x}=0$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[3e^2-2,+\infty\right)$

και $f(x)>0$, αφού για κάθε $x>0$ ισχύει: $f(x)\geq3e^2-2>0$

iii) $f(x)=\frac{2e^2}{x}-2+e^{2x}$, $x>0$

α. Η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[1,2]\subset(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f'(x)=2e^{2x}-\frac{2e^2}{x^2}$. Επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho)=f(2)-f(1)$ δηλαδή η εφαπτομένη ευθεία στη $C_f$ στο σημείο $M(\rho,f(\rho))$ είναι παράλληλη στην ευθεία ΚΛ αφού $f(1)=3e^2-2$ και $\lambda_{K\Lambda}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ (γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.)

β. Είναι $f'(\rho)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=e^2\left(e^2-2\right)$

Ακόμη από iii (α) έχουμε $\frac{e}{2}-1<1<\rho<2<e+1$ και η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα από (ii), άρα:

$$f'\left(\frac{e}{2}-1\right)<f'(1)<f'(\rho)<f'(2)<f'(e+1)\Leftrightarrow f'\left(\frac{e}{2}-1\right)<e^2\left(e^2-2\right)<f'(e+1)$$

## ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

### ΜΠΕΡΝΑΡΝΤ ΡΙΜΑΝ (1826-1866)

Κορυφαίος Γερμανός μαθηματικός, που έμεινε στην ιστορία για τις πρωτότυπες ιδιοφυείς ιδέες με τις οποίες άνοιξε εντελώς νέους δρόμους τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική. Σπούδασε στο Βερολίνο κοντά στους Γιακόμπι, Ντίριχλετ, Στάινερ και κατόπιν στο Πανεπιστήμιο Γκέτινγκεν, όπου δίδασκε ο διάσημος Γκάους. Εκεί έδωσε το πρώτο δείγμα της διάνοιας του. Παρουσίασε διδακτορική εργασία με θέμα τη «Θεμελίωση μιας γενικής θεωρίας συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής». Επρόκειτο για αριστουργηματική συνεισφορά στα σύγχρονα τότε μαθηματικά, που προκάλεσε το θαυμασμό ακόμα και του αυστηρού Γκάους! Η μελέτη του αυτή οδήγησε στη σύλληψη της εφαρμοζόμενης και σήμερα έννοιας της «επιφάνειας Ρίμαν» και της έννοιας των «πολύφυλλων» επιφανειών. Κάθε τέτοια επιφάνεια αποτελεί το πεδίο τιμών μιας αρχικά πλειονότιμης συνάρτησης μιας μιγαδικής μεταβλητής και κατασκευάζεται τεχνητά από κατάλληλα αρθρωμένα επίπεδα, το καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε έναν και μόνο κλάδο της συνάρτησης. Οι εργασίες του Ρίμαν δεν άργησαν να χτίσουν τα θεμέλια μιας σύγχρονης (τότε) γεωμετρίας, που πήγε μπροστά τις μέχρι τότε γνωστές ευκλείδειες θεωρήσεις.