ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

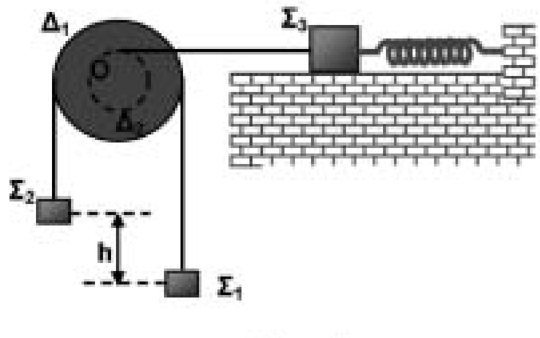
ΦΥΣΙΚΗ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΣΥΝΟΔΙΝΟΣ
ΜΑΝΩΛΗΣ ΡΕΜΠΕΛΑΚΗΣ
ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΓΡΕΤΟΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΠΙΣΧΙΝΑΣ

Για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις πρέπει
α) η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται να είναι μηδέν ($\Sigma\vec{F}=0$) και
β) το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που του ασκούνται ως προς οποιοδήποτε σημείο να είναι μηδέν ($\Sigma\tau=0$).

ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΣΩΜΑΤΩΝ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Η διπλή τροχαλία του συστήματος που φαίνεται στο διπλανό σχήμα αποτελείται από δύο ομόκεντρους, ομογενείς δίσκους Δ_1 και Δ_2 με ακτίνες $R_1 = 0{,}5m$ και $R_2 = 0{,}25m$, αντίστοιχα. Οι δύο δίσκοι συνδέονται μεταξύ τους έτσι ώστε να περιστρέφονται ως ένα σώμα, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό τους.
Στα δύο αυλάκια των δίσκων της τροχαλίας είναι τυλιγμένα αβαρή, μη εκτατά νήματα. Από τα ελεύθερα άκρα του νήματος που είναι τυλιγμένο γύρω από το δίσκο Δ_1 κρέμονται δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και $m_2 > m_1$, αντίστοιχα. Η συνολική μάζα των Σ_1 και Σ_2 είναι 10Kg. Στο ελεύθερο άκρο του τεντωμένου, οριζόντιου νήματος που είναι τυλιγμένο γύρω από το δίσκο Δ_2 είναι δεμένο σώμα Σ_3, μάζας $m_3 = 2Kg$ το οποίο είναι προσδεδεμένο σε ελατήριο σταθεράς $K = 200N/m$.



Σχήμα 1

Ο άξονας του ελατηρίου είναι οριζόντιος και το οριζόντιο επίπεδο που μπορεί να κινηθεί το Σ_3 είναι λείο. Τα σώματα του συστήματος αρχικά είναι ακίνητα. Τότε, η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $U_{ελ} = 16J$ και οι θέσεις των Σ_1 και Σ_2 διαφέρουν υψομετρικά κατά $h = 1m$.
Να υπολογίσετε:
α) το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου που ασκείται στο σώμα Σ_3,
β) τις μάζες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2.
Τη χρονική στιγμή t = 0s κόβουμε το νήμα που συνδέει την τροχαλία με το σώμα Σ_3.
γ) Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας,
δ) Να βρείτε το μέτρο των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 όταν βρεθούν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο,
ε) Να βρείτε τις χρονικές εξισώσεις του αριθμού των περιστροφών της τροχαλίας ($N_{τρ}$) και των ταλαντώσεων του σώματος Σ_3 (N_3). Ποια χρονική στιγμή η διαφορά $N' = N_3 - N_{τρ}$ γίνεται μέγιστη; Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή;
Δίνεται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$, η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο της που διέρχεται από το κέντρο της $I = 7{,}5Kg\cdot m^2$.
Θεωρήστε πως τα νήματα δεν ολισθαίνουν στα αυλάκια της τροχαλίας και πως το μήκος τους είναι αρκετό, ώστε τα σώματα Σ_1, Σ_2 να μην συγκρούονται με την τροχαλία.

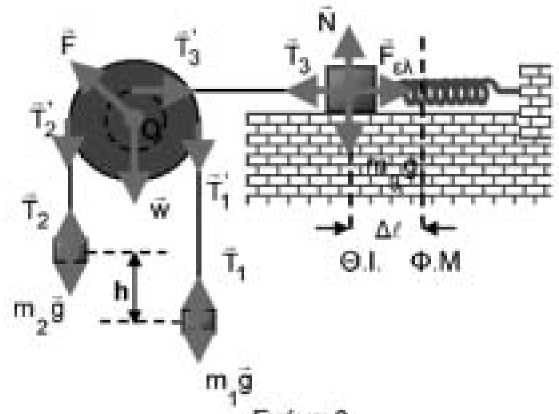
ΛΥΣΗ

α) Όταν το σώμα Σ_3 είναι ακίνητο, το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell$ και ισχύει:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}K(\Delta\ell)^2 \text{ ή } \Delta\ell = \sqrt{\frac{2U_{ελ}}{K}} \text{ ή } \Delta\ell = 0{,}4m .$$

Στο σώμα Σ_3 ασκούνται οι εξής δυνάμεις:
- το βάρος $m_3\vec{g}$,
- η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$,
- η τάση του νήματος $\vec{T}_3$,
- η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$.

Για τη δύναμη του ελατηρίου ισχύει: $F_{ελ} = K\cdot\Delta\ell$ ή $F_{ελ} = 80N$



Σχήμα 2

β) Εφαρμόζοντας τον 1° νόμο του Newton για το σώμα Σ_3 προκύπτει:
$T_3 = F_{ελ}$ ή $T_3 = 80N$
Στα σώματα Σ_1 και Σ_2 ασκούνται, αντίστοιχα:
- τα βάρη $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$,
- οι τάσεις των νημάτων $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$.

Από τον 1° νόμο του Newton για τα σώματα Σ_1, Σ_2 προκύπτει αντίστοιχα:
$T_1 = m_1g$ (1) και $T_2 = m_2g$ (2)
Στην τροχαλία ασκούνται οι εξής δυνάμεις:
- το βάρος $\vec{w}$,
- οι τάσεις των νημάτων $\vec{T}'_1$, $\vec{T}'_2$ και $\vec{T}'_3$ (αφού τα νήματα είναι αβαρή ισχύει $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$, $T'_3 = T_3$),
- η δύναμη στήριξης $\vec{F}$ από τον άξονα.

Από τη συνθήκη ισορροπίας για την τροχαλία προκύπτει:
$\Sigma\tau_{(o)} = 0$ ή $T'_3R_2 + T'_1R_1 - T'_2R_1 = 0$ ή $T_3R_2 + T_1R_1 - T_2R_1 = 0$ (3)
Η σχέση (3) μέσω των σχέσεων (1) και (2) γίνεται: $T_3R_2 + m_1gR_1 - m_2gR_1 = 0$ ή

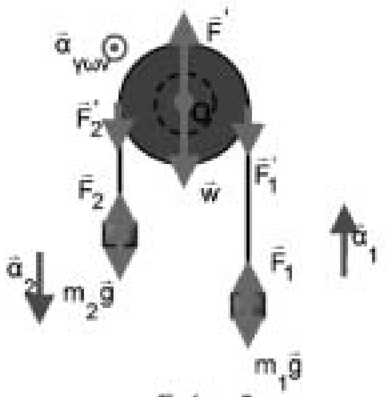
$m_2 - m_1 = \frac{T_3 R_2}{g R_1}$ ή $m_2 - m_1 = 4$ (S.I.) (4) Όμως ισχύει: $m_2 + m_1 = 10$ (S.I.) (5)

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (4) και (5) προκύπτει: m_1 = 3Kg και m_2 = 7Kg.

γ) Μετά το κόψιμο του νήματος που συνδέει την τροχαλία και το σώμα $Σ_3$, η τροχαλία εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση με γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $α_{γων}$, ενώ τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ εκτελούν ομαλά επιταχυνόμενες μεταφορικές κινήσεις.

Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας, η επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{α}_ε$ των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας έχει ίσο μέτρο με τα μέτρα των επιταχύνσεων $\vec{α}_1$ και $\vec{α}_2$ των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$, αντίστοιχα. Δηλαδή, ισχύει: $α_1 = α_2 = α = α_ε = α_{γων} R_1$.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος τροχαλία – $Σ_1$ – $Σ_2$ φαίνονται στο σχήμα 3. Όμοια για τις τάσεις των νημάτων ισχύει: $F_1' = F_1$, $F_2' = F_2$.



Σχήμα 3

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση των $Σ_1$ και $Σ_2$ παίρνουμε, αντίστοιχα:

$m_2 g - F_2 = m_2 α$ ή $F_2 = m_2 g - m_2 α$ (6) και

$F_1 - m_1 g = m_1 α$ ή $F_1 = m_1 g + m_1 α$ (7).

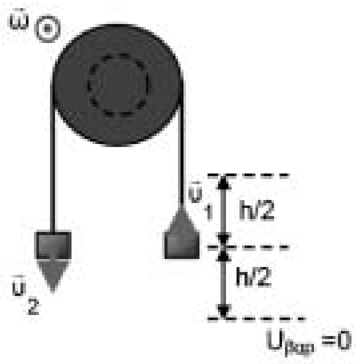
Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την κίνηση της τροχαλίας, παίρνουμε:

$Στ_{(o)} = I \cdot α_{γων}$ ή $F_2 R_1 - F_1 R_1 = I α_{γων}$. Μέσω των σχέσεων (6) και (7), προκύπτει:

$$m_2 g - m_2 α - m_1 α - m_1 g = I \frac{α_{γων}}{R_1} \text{ ή } α = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R_1^2}} g \text{ ή } α = 1 m/s^2.$$

δ) Αφού τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ ξεκινούν ταυτόχρονα και κινούνται με επιταχύνσεις ίδιου μέτρου έχουν κάθε χρονική στιγμή ταχύτητες και μετατοπίσεις ίδιου μέτρου. Επομένως θα βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, όταν το $Σ_2$ έχει κατέβει κατά h/2 (αντίστοιχα, το $Σ_1$ θα έχει ανέβει κατά h/2).

Επιλέγουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που βρίσκεται το $Σ_1$ την t=0s και εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για το σύστημα τροχαλία – $Σ_1$ – $Σ_2$.



Σχήμα 4

$$E_{M,αρχ} = E_{M,τελ} \text{ ή } m_2 g h = \frac{1}{2} m_1 υ^2 + \frac{1}{2} m_2 υ^2 + \frac{1}{2} I ω^2 + m_1 g \frac{h}{2} + m_2 g \frac{h}{2}$$

Όμως ισχύει: $υ = ω \cdot R_1$ και συνεπώς η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$m_2 g h = \frac{1}{2} m_1 υ^2 + \frac{1}{2} m_2 υ^2 + \frac{1}{2} I \frac{υ^2}{R_1^2} + m_1 g \frac{h}{2} + m_2 g \frac{h}{2} \text{ ή}$$

$$υ = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R_1^2}} g h} \text{ ή } υ = 1 m/s.$$

ε) Ο αριθμός των περιστροφών της τροχαλίας σε σχέση με το χρόνο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$N_{τρ} = \frac{Δφ}{2π} = \frac{α_{γων} t^2}{4π} \text{ ή } N_{τρ} = \frac{Δφ}{2π} = \frac{α t^2}{4π R_1} \text{ ή } N_{τρ} = \frac{1}{2π} t^2 \text{ (S.I.)}$$

Ο αριθμός των ταλαντώσεων του σώματος $Σ_3$ σε σχέση με το χρόνο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$N_3 = \frac{t}{T_3} = \frac{t}{2π\sqrt{\frac{m_3}{K}}} \text{ ή } N_3 = \frac{10}{2π} t \text{ (S.I.)}$$

Έτσι $N' = N_3 - N_{τρ} = \frac{10}{2π} t - \frac{1}{2π} t^2$ ή $2πN' = 10t - t^2$ ή $t^2 - 10t + 2πN' = 0$

Ισχύει $Δ \geq 0$ ή $100 - 2πN' \geq 0$ ή $N' \leq \frac{100}{8π}$ ή $N'_{max} = \frac{100}{8π} = \frac{12,5}{π}$

Για $N' = N'_{max}$ ή $\frac{10}{2π} t - \frac{1}{2π} t^2 = \frac{12,5}{π}$ ή t = 5s.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΝΙΛΣ ΜΠΟΡ (1885-1962)

Δανός φυσικός, που συνέδεσε το όνομά του με επαναστατικές ανακαλύψεις στον τομέα των ακτινοβολιών και με συνεδριακές δραστηριότητες μέσω δικού του ερευνητικού Ινστιτούτου. Από 20 ετών ο Μπορ, κατέπληξε τον κόσμο της Φυσικής όταν φοιτητής ών στην Κοπεγχάγη πήρε το πρώτο βραβείο όταν παρουσίασε εργασία για τους πίδακες υγρών. Το οικογενειακό περιβάλλον του τον βοήθησε να καλλιεργήσει το ταλέντο του στη Φυσική πολύ γρήγορα. Ο πατέρας του ήταν εύπορος και φρόντισε να στείλει τον Νιλς δίπλα στα «μεγάλα κεφάλια» της εποχής, όπως ο Τζ. Τζ. Τόμσον και ο Ράδερφορντ. Ο Μπορ μελέτησε τα «μοντέλα» σκέψης και μελέτης των δασκάλων του πάνω στο μέγεθος και τη σταθερότητα του ατόμου και... τα ανέτρεψε! Ακολουθώντας ανατρεπτικές και αντιφατικές υποθέσεις οδηγήθηκε σε νέες συναρπαστικές και πρωτοποριακές ανακαλύψεις για τις ακτινοβολίες και τους ηλεκτρονικούς φλοιούς του ατόμου. Δεν είναι τυχαίο ότι ο ίδιος ο Αϊνστάιν αξιοποίησε τις εργασίες του για να δρομολογήσει τις δικές του μελέτες πάνω στην τροχιά του ηλεκτρονίου μέσα στο άτομο. Το ερευνητικό Ινστιτούτο που ίδρυσε ο Μπορ στην Κοπεγχάγη λειτούργησε σαν συνεδριακό κέντρο για προβολή επιστημονικών επιτευγμάτων αλλά και σαν καταφύγιο εργασίας για όσους επιστήμονες διώχτηκαν από τη ναζιστική Γερμανία.