ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΜΑΡΙΝΗΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ

“

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ(αx)}{x} = α,\ α \in R^*$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)} = 0$ όταν

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty,\ x_0 \in R$

ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x-1+ημx\cdot συν\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ \dfrac{λ\cdot 4^x-2}{e^x+4^{x+1}} & ,\ x\ge 0\end{cases}$ με $λ\in\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

A. Να βρείτε:
   i) Τον πραγματικό αριθμό λ.
   ii) Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

B. Αν για τη συνάρτηση g: (0, +∞) → (0, +∞) ισχύει $g(x)\ge -x^3 f(x)$, για κάθε x > 0 να δείξετε:
   i) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
   ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|g^2(x)-g(x)+2|-8}{|3-g(x)|\cdot x\cdot ημ\dfrac{5}{x}}=+\infty$.

Λύση

A. i) • Για $x<0$ είναι $f(x)=x-1+ημx\cdot συν\dfrac{1}{x}$. Θα υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(ημx\cdot συν\dfrac{1}{x}\right)$. Είναι:

$\left|ημx\cdot συν\dfrac{1}{x}\right|=|ημx|\cdot\left|συν\dfrac{1}{x}\right|\le|ημx|$ (αφού $\left|συν\dfrac{1}{x}\right|\le 1$) άρα

$$\left|ημx\cdot συν\frac{1}{x}\right|\le|ημx| \Leftrightarrow -|ημx|\le ημx\cdot συν\frac{1}{x}\le|ημx|.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^-}|ημx|=\lim\limits_{x\to 0^-}(-|ημx|)=0$, επομένως σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής (για $x<0$ κοντά στο μηδέν) θα έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(ημx\cdot συν\dfrac{1}{x}\right)=0$.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1+0=-1$.

• Για $x\ge 0$ είναι $f(x)=\dfrac{λ\cdot 4^x-2}{e^x+4^{x+1}}$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{λ\cdot 4^x-2}{e^x+4^{x+1}}=\dfrac{λ\cdot 1-2}{1+4}=\dfrac{λ-2}{5}$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι και στο $x_o=0$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

Έτσι $\dfrac{λ-2}{5}=-1 \Leftrightarrow λ=-3$.

ii) Για $x\ge 0$ είναι $f(x)\overset{i)}{=}\dfrac{-3\cdot 4^x-2}{e^x+4^{x+1}}$ άρα

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3\cdot 4^x-2}{e^x+4^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3\cdot\frac{4^x}{4^x}-\frac{2}{4^x}}{\frac{e^x}{4^x}+\frac{4^{x+1}}{4^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3-\frac{2}{4^x}}{\left(\frac{e}{4}\right)^x+4}=\frac{-3-0}{0+4}=-\frac{3}{4},$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{4^x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{4}\right)^x=0$, επειδή $0<\dfrac{e}{4}<1$.

B. i) Για κάθε $x>0$ έχουμε $g(x)\ge -x^3 f(x)$, οπότε θεωρώντας $h(x)=-x^3 f(x)$ παίρνουμε $g(x)\ge h(x)$ (1), με $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3 f(x)\right)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\dfrac{3}{4}$ (ερώτ. Aii)) και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$, άρα $h(x)>0$ για κάθε $x>α, α\in(0,+\infty)$

Από (1): $\dfrac{1}{g(x)}\le\dfrac{1}{h(x)}$ και $\dfrac{1}{g(x)}>0$ (υπόθεση) άρα $0<\dfrac{1}{g(x)}\le\dfrac{1}{h(x)}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{h(x)}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$.

Έτσι σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής (για $x>α$, $α\in(0,+\infty)$) έχουμε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{g(x)}=0$. Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{g(x)}}=+\infty$ $\left(\dfrac{1}{g(x)}>0\right.$ για $x>α$, $\left.α\in(0,+\infty)\right)$.

ii) Για κάθε $x>α, α\in(0,+\infty)$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(g^2(x)-g(x)+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}g^2(x)\left(1-\dfrac{1}{g(x)}+\dfrac{2}{g^2(x)}\right)=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{g^2(x)}=0$

επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ (από ερώτ. Β i)).

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-g(x))=-\infty$ επομένως $g^2(x)-g(x)+2>0$ και $3-g(x)<0$, για $x>\alpha$, $\alpha\in(0,+\infty)$

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|g^2(x)-g(x)+2\right|-8}{\left|3-g(x)\right|\cdot x\cdot ημ\frac{5}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g^2(x)-g(x)-6}{(g(x)-3)\cdot x\cdot ημ\frac{5}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(g(x)-3)(g(x)+2)}{(g(x)-3)\cdot x\cdot ημ\frac{5}{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+2}{x\cdot ημ\frac{5}{x}}=+\infty$, αφού για $x>\alpha$, $\alpha\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)+2)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot ημ\frac{5}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(5\cdot\frac{ημ\frac{5}{x}}{\frac{5}{x}}\right)=\lim_{u\to0}\left(5\cdot\frac{ημu}{u}\right)=5\cdot1=5,$$ επειδή για $\frac{5}{x}=u$

είναι $x\to+\infty \Leftrightarrow u\to0$ άρα $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{ημu}{u}=1$.

Θέμα 2^{ο}

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και $A\in C_f$ με $A(1,-1)$.

α. Να βρείτε τον $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to3}\left[(\lambda-1)f(x-2)+f(4-x)\right]=2$.

β. Αν επιπλέον ισχύει $-3f(x-2)+f(4-x)=x^2-7$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε

i) να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x^2+x)$

ii) να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ημ(f(x))}{2x^2+2x}$.

Λύση

α. • Για το $\lim\limits_{x\to3}f(x-2)$ θέτουμε $x-2=u$ (για x κοντά στο 3) οπότε $x=u+2$ και $x\to3 \Leftrightarrow u\to1$.

Έτσι $\lim\limits_{x\to3}f(x-2)=\lim\limits_{u\to1}f(u)=f(1)=-1$ (αφού f συνεχής στο 1, δηλ. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=-1$).

• Για το $\lim\limits_{x\to3}f(4-x)$ θέτουμε $4-x=t$ (για x κοντά στο 3) οπότε $x=4-t$ και $x\to3 \Leftrightarrow t\to1$.

Έτσι $\lim\limits_{x\to3}f(4-x)=\lim\limits_{t\to1}f(t)=f(1)=-1$ (αφού f συνεχής στο 1, δηλ. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=-1$).

Επομένως $\lim\limits_{x\to3}\left[(\lambda-1)f(x-2)+f(4-x)\right]=2 \Leftrightarrow (\lambda-1)\lim\limits_{x\to3}f(x-2)+\lim\limits_{x\to3}f(4-x)=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda-1)(-1)+(-1)=2 \Leftrightarrow -\lambda+1-1=2 \Leftrightarrow \lambda=-2$.

β. i) Είναι $f(4-x)-3f(x-2)=x^2-7 \quad (1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Στην (1) θέτουμε όπου x το $x+2$ και έχουμε: $f(2-x)-3f(x)=x^2+4x-3 \quad (2)$.

Στην (2) θέτουμε όπου x το $2-x$ και έχουμε:

$f(x)-3f(2-x)=(2-x)^2+4(2-x)-3 \Leftrightarrow f(x)-3f(2-x)=x^2-8x+9 \quad (3)$.

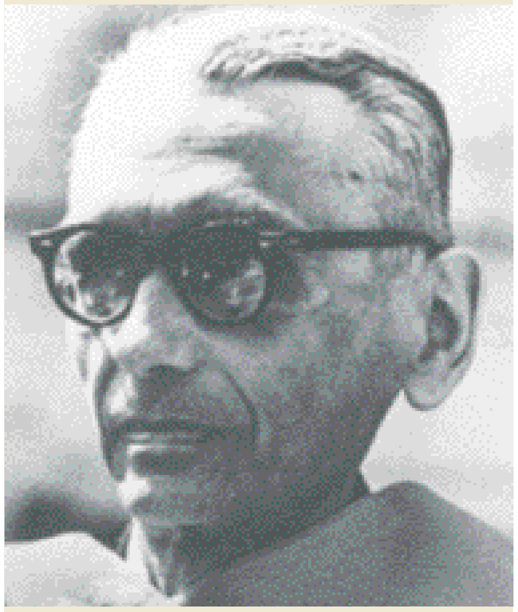
Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της (2) με 3 παίρνουμε: $3f(2-x)-9f(x)=3x^2+12x-9 \quad (4)$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3), (4) έχουμε την σχέση: $-8f(x)=4x^2+4x \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{2}(x^2+x)$.

ii) Έχουμε $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x^2+x)$ οπότε: $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ημ(f(x))}{2x^2+2x}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ημ\left[-\frac{1}{2}(x^2+x)\right]}{2x^2+2x}=\lim\limits_{x\to-1}\left[\left(-\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{ημ\left[-\frac{1}{2}(x^2+x)\right]}{-\frac{1}{2}(x^2+x)}\right]$.

Θέτουμε (για x κοντά στο -1) $-\dfrac{1}{2}(x^2+x)=u$ οπότε $x\to-1 \Leftrightarrow u\to0$.

Έτσι $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ημ(f(x))}{2x^2+2x}=-\dfrac{1}{4}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{ημu}{u}=-\dfrac{1}{4}\cdot1=-\dfrac{1}{4}$.



ΚΟΥΡΤ ΓΚΕΝΤΕΛ (1906-1978)

Αμερικανός μαθηματικός, αυστριακοεβραϊκής καταγωγής, μέλος του κλαμπ των θετικιστών, χωρίς ο ίδιος να θεωρεί «θετικιστή» τον εαυτό του.

Η συμβολή του έχει να κάνει κυρίως με την ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής. Δημοσίευσε λίγες σχετικά εργασίες αλλά τα θεωρήματά του αποτέλεσαν τους θεμέλιους λίθους της μαθηματικής λογικής. Κορυφαίο θεώρημά του, αυτό της μη πληρότητας, που απέδειξε το 1931 και πήρε το όνομά του. Σύμφωνα με αυτό, οποιαδήποτε μαθηματική θεωρία, που περιέχει τους θετικούς ακεραίους και θεμελιώνεται πάνω σε συμβιβαστά αξιώματα δεν είναι πλήρης.

Ο Γκέντελ απέδειξε επίσης ότι αν μια αξιωματική επί των συνόλων είναι συμβιβαστή, τότε παραμένει συμβιβαστή και μετά την προσθήκη του αξιώματος της επιλογής του Ερνστ Τσερμέλο. Με αυτό το θεώρημα τερματίστηκε η μεγάλη διαμάχη που είχε διχάσει τους μαθηματικούς στις πρώτες δεκαετίες του 20 αιώνα σχετικά με τη χρησιμοποίηση του αξιώματος της επιλογής.

Στην Αμερική ο Γκέντελ βρέθηκε όπως και πολλοί άλλοι εβραϊκής καταγωγής Ευρωπαίοι επιστήμονες μετά την άνοδο του ναζισμού στην Γερμανία και την Αυστρία.