ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΥΡΙΑΚΟΥΛΗΣ
ΞΑΝΘΗ ΒΑΣΙΛΑΚΟΥ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

«Αν $z \in \mathbb{C}$ και η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο ευθείας ε, τότε η ελάχιστη τιμή του $|z-(\alpha+\beta i)|$, με $K(\alpha,\beta) \notin (\varepsilon)$, είναι $d(K,\varepsilon)$»

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Θέμα 1ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z τέτοιος ώστε: $4z-3|z|=i(4+3z|z|)$

α) Να υπολογίσετε το $|z|$

β) Να βρείτε τον μιγαδικό z

γ) Έστω κ, λ πραγματικοί αριθμοί με $\kappa\cdot\lambda\neq 0$ και $\nu\in N-\{0\}$

Αν ισχύει $(\lambda+\kappa z)^\nu=(\kappa-\lambda z)^\nu$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ν

Λύση

α) $4z-3|z|=i(4+3z|z|)\Leftrightarrow 4z-3|z|=4i+3iz|z|\Leftrightarrow 4z-3iz|z|=3|z|+4i\Leftrightarrow z(4-3i|z|)=3|z|+4i\Leftrightarrow z=\dfrac{3|z|+4i}{4-3i|z|}$, (1)

Οπότε $|z|=\left|\dfrac{3|z|+4i}{4-3i|z|}\right|\Leftrightarrow|z|=\dfrac{|3|z|+4i|}{|4-3i|z||}\Leftrightarrow|z|=\dfrac{\sqrt{9|z|^2+16}}{\sqrt{16+9|z|^2}}\Leftrightarrow|z|=1$

β) Από το ερώτημα α) είναι $|z|=1$, οπότε αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $z=\dfrac{3+4i}{4-3i}$

Είναι $-zi=\dfrac{-3i-4i^2}{4-3i}\Leftrightarrow -zi=\dfrac{4-3i}{4-3i}\Leftrightarrow -zi=1\Leftrightarrow -zi^2=i\Leftrightarrow z=i$

γ) Από υπόθεση ισχύει: $(\lambda+\kappa z)^\nu=(\kappa-\lambda z)^\nu$, που επειδή $z=i$, γράφεται ισοδύναμα $(\lambda+\kappa i)^\nu=(\kappa-\lambda i)^\nu$

Επομένως,

$(\lambda+\kappa i)^\nu=(\kappa-\lambda i)^\nu\Leftrightarrow\left[i\left(\dfrac{\lambda}{i}+\kappa\right)\right]^\nu-(\kappa-\lambda i)^\nu=0\Leftrightarrow[i(-\lambda i+\kappa)]^\nu-(\kappa-\lambda i)^\nu=0\Leftrightarrow i^\nu(\kappa-\lambda i)^\nu-(\kappa-\lambda i)^\nu=0\Leftrightarrow$

$(\kappa-\lambda i)^\nu(i^\nu-1)=0\overset{\kappa\cdot\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} i^\nu-1=0\Leftrightarrow i^\nu=1$, (2)

Αν $\nu=4\kappa+1$, $\kappa\in N$ τότε από (2): $i=1$, αδύνατο.
Αν $\nu=4\kappa+2$, $\kappa\in N$ τότε από (2): $-1=1$, αδύνατο.
Αν $\nu=4\kappa+3$, $\kappa\in N$ τότε από (2): $-i=1$, αδύνατο.
Ενώ αν $\nu=4\kappa$, $\kappa\in N$ τότε από (2): $1=1$, που ισχύει.
Άρα $\nu=4\kappa$ (με $\kappa\in N-\{0\}$ αφού $\nu\in N-\{0\}$),που για $\kappa=1$ ο ζητούμενος ελάχιστος φυσικός ν, έχει τιμή $\nu=4$

Θέμα 2ο

Έστω z μιγαδικός αριθμός για τον οποίο ισχύει: $|z+1+i\sqrt{3}|=4$

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο C της εικόνας του z στο μιγαδικό επίπεδο καθώς και τους μιγαδικούς z_1, z_2 των οποίων οι εικόνες Α, Β βρίσκονται στον C και είναι τέτοιοι ώστε $|z_1|=|z|_{\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o}$, $|z_2|=|z|_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau o}$

β) Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του $|w+2i|$, όπου w ο μιγαδικός που η εικόνα του είναι σημείο της ευθείας στην οποία ανήκουν τα σημεία Α, Β

γ) Να αποδείξετε ότι $2\leq|z-1+i\sqrt{3}|\leq 6$

Λύση

α) Είναι $|z+1+i\sqrt{3}|=4\Leftrightarrow|z-(-1-i\sqrt{3})|=4$

Η ισότητα $|z-(-1-i\sqrt{3})|=4$ επαληθεύεται από όλους τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από το σημείο $K(-1,-\sqrt{3})$ σταθερή απόσταση ίση με 4 και μόνο από αυτούς.

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος C είναι ο κύκλος με κέντρο $K(-1,-\sqrt{3})$ και ακτίνα ρ = 4, δηλαδή ο κύκλος C: $(x+1)^2+(\psi+\sqrt{3})^2=16$. Το $|z|$ είναι η απόσταση της εικόνας M(z) από την αρχή O(0, 0), δηλαδή το μήκος (OM)

Γνωρίζουμε όμως ότι αν η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο C στα σημεία Α και Β, τότε $(OA)\leq(OM)\leq(OB)$, που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι το μήκος (ΟΒ) και η ελάχιστη το μήκος (ΟΑ). Οπότε $M(z_1) \equiv A$ και $M(z_2) \equiv B$.

Η εξίσωση της ευθείας ΟΚ είναι η $\psi = \frac{-\sqrt{3}}{-1}x \Leftrightarrow \psi = \sqrt{3}x$. Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β θα είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases}(x+1)^2+\left(\psi+\sqrt{3}\right)^2=16\\ \psi=\sqrt{3}x\end{cases} \text{, οπότε : } \begin{cases}(x+1)^2+\left(\sqrt{3}x+\sqrt{3}\right)^2=16\\ \psi=\sqrt{3}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2+3(x+1)^2=16\\ \psi=\sqrt{3}x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2=4\\ \psi=\sqrt{3}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+1=2\\ \psi=\sqrt{3}x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x+1=-2\\ \psi=\sqrt{3}x\end{cases}, \quad \text{που είναι τα ζεύγη } \left(1,\sqrt{3}\right),\ \left(-3,-3\sqrt{3}\right)$$

Άρα ο μιγαδικός z για τον οποίο το $|z|$ έχει την ελάχιστη τιμή είναι ο $z_1 = 1+i\sqrt{3}$, με

$$(OA) = |z_1| = \sqrt{1+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

και ο μιγαδικός z για τον οποίο το $|z|$ έχει την μέγιστη τιμή είναι ο $z_2 = -3-3\sqrt{3}\,i$, με

$$(OB) = |z_2| = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$$

β) Το $|w+2i| = |w-(-2i)|$, είναι η απόσταση της εικόνας Λ του w από την εικόνα $N(0,-2)$ του μιγαδικού $-2i$

Για κάθε σημείο Λ της ευθείας ΑΒ (που είναι η ΟΚ), ισχύει: $(N\Lambda) \geq (NP)$, όπου Ρ το σημείο τομής της ευθείας ΑΒ με την κάθετη που φέρουμε από το Ν προς την ΑΒ

Συνεπώς, $\min|w+2i| = (NP) = d(N,\varepsilon)$, όπου (ε) η ευθεία ΑΒ: $\sqrt{3}x - \psi = 0$

Επομένως $\min|w+2i| = \frac{\left|\sqrt{3}\cdot 0-(-2)\right|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+1}} = 1$

γ) Είναι $\left|z-1+i\sqrt{3}\right| = \left|\left(z+1+i\sqrt{3}\right)+(-2)\right| \leq \left|z+1+i\sqrt{3}\right|+2$, άρα $\left|z-1+i\sqrt{3}\right| \leq 6$

Επίσης $\left|z-1+i\sqrt{3}\right| = \left|\left(z+1+i\sqrt{3}\right)+(-2)\right| \geq \left|\left|z+1+i\sqrt{3}\right|-2\right|$, άρα $\left|z-1+i\sqrt{3}\right| \geq 2$. Οπότε $2 \leq \left|z-1+i\sqrt{3}\right| \leq 6$

Θέμα 3^{o}

Θεωρούμε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει: $(2z-1)^7 = (3-z)^7$

α) Να υπολογίσετε το $|3z+1|$

β) Να βρείτε τη γραμμή στην οποία ανήκει το σύνολο των εικόνων του μιγαδικού z

γ) Αν $w \in \mathbb{C}$, με $w = z - \frac{5}{3} + 4i$, να βρείτε τη γραμμή στην οποία ανήκει το σύνολο των εικόνων του μιγαδικού w

Λύση

α) Αφού $(2z-1)^7 = (3-z)^7$, θα ισχύει και $\left|(2z-1)^7\right| = \left|(3-z)^7\right|$, άρα $|2z-1|^7 = |3-z|^7 \Leftrightarrow |2z-1| = |3-z|$. Οπότε:

$$|2z-1|^2 = |3-z|^2 \Leftrightarrow (2z-1)\left(2\bar{z}-1\right) = (3-z)\left(3-\bar{z}\right) \Leftrightarrow 4z\bar{z}-2z-2\bar{z}+1 = 9-3\bar{z}-3z+z\bar{z} \Leftrightarrow 3z\bar{z}+z+\bar{z}-8=0, \ (1)$$

Είναι $|3z+1|^2 = (3z+1)\left(3\bar{z}+1\right) = 9z\bar{z}+3z+3\bar{z}+1 = 3\left(3z\bar{z}+z+\bar{z}\right)+1 \overset{(1)}{=} 3\cdot 8+1 = 25$, άρα $|3z+1| = 5$

β) Αποδείξαμε ότι $|3z+1| = 5$, άρα $\left|z+\frac{1}{3}\right| = \frac{5}{3}$. Έτσι το σύνολο των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{1}{3},0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{5}{3}$

γ) Έχουμε $w = z - \frac{5}{3} + 4i$, οπότε $w = z + \frac{1}{3} - \frac{6}{3} + 4i \Leftrightarrow w + 2 - 4i = z + \frac{1}{3}$. Τότε $|w+2-4i| = \left|z+\frac{1}{3}\right| \overset{\beta)}{\Leftrightarrow} |w+2-4i| = \frac{5}{3}$

Συνεπώς το σύνολο των εικόνων του w είναι κύκλος με κέντρο $\Lambda(-2,4)$ και ακτίνα $\rho = \frac{5}{3}$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΝΙΚΟΛΟ ΦΟΝΤΑΝΑ ΤΑΡΤΑΛΙΑ (1499-1557)

Ιταλός αυτοδίδακτος μαθηματικός από φτωχή οικογένεια της Μπρέσια που εργάστηκε σαν δάσκαλος και καθηγητής Μαθηματικών στη Βενετία, όπου και πέθανε. Το όνομά του συνδέθηκε κυρίως με την επινόηση μεθόδων λύσης κυβικών εξισώσεων στις οποίες οδηγήθηκε σε συνεργασία με τους συμπατριώτες του Σκιπιόνε Ντελ Φέρο και Τζιρόλαμο Καρντάνο. Ασχολήθηκε κυρίως με τη μελέτη μαθηματικών προβλημάτων της στρατιωτικής βιομηχανίας της εποχής του, όπως τη βαλλιστική και τις οχυρώσεις. Το 1537 μέσα από το έργο του «Νέα επιστήμη» απέδειξε ότι η τροχιά που διανύει ένα βλήμα δεν είναι ευθεία αλλά καμπύλη και ότι εκσφενδονίζεται σε μεγαλύτερη απόσταση όταν η γωνία του με το έδαφος είναι 45 μοίρες. Άλλο σημαντικό έργο του, που δημοσιεύτηκε μετά το θάνατό του ήταν η «Γενική πραγματεία περί αριθμών και μέτρων». Περιείχε πλούσια ύλη για θέματα αριθμητικής, άλγεβρας και γεωμετρίας. Ο Νικολό Φοντάνα – το «Ταρτάλια» ήταν παρατσούκλι που του είχαν βγάλει επειδή τραύλιζε και το οποίο ενσωμάτωσε ο ίδιος στο όνομά του σε μια επίδειξη υπερβατικού αυτοσαρκασμού – υπήρξε ο πρώτος στην Ιταλία που παρουσίασε ολοκληρωμένες μεταφράσεις των θεωρημάτων του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη.