ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΥΡΙΑΚΟΥΛΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΜΑΡΙΝΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΑΣΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΞΑΝΘΗ ΒΑΣΙΛΑΚΟΥ

"Αν f κυρτή στο Δ $\subseteq$ R, τότε η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη αυτής σε οποιοδήποτε σημείο της εκτός του σημείου επαφής."

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 1°

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}-\frac{x-\alpha}{x}$, $x>0$, $\alpha>0$.

i) Αν $g(x)=x^2f'(x)$, $x>0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

ii) Αν $g(1)=0$ να εξετάσετε την f που προκύπτει ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της καθώς και το πρόσημό της.

iii) Για την f του ερωτήματος (ii) να δείξετε ότι:

α) Υπάρχει $\xi\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $A(1, 3e-1)$, $B(e, f(e))$.

β) Ισχύει $0<\frac{e^{e^2}-3e+2}{e-1}<2e^{e^2+1}-\frac{2}{e}$.

Λύση

i) Για $x>0$ έχουμε $f'(x)=2xe^{x^2}-\frac{\alpha}{x^2}$, $\alpha>0$ και $g(x)=x^2f'(x)=2x^3e^{x^2}-\alpha$, $\alpha>0$.

Οπότε $g'(x)=6x^2e^{x^2}+4x^4e^{x^2}=2x^2e^{x^2}(3+2x^2)>0$, για κάθε $x>0$, άρα η g είναι γνησ. αύξ. στο $(0,+\infty)$.

Ακόμη $\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}(2x^3e^{x^2}-\alpha)=-\alpha$, $\alpha>0$ και $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x^3e^{x^2}-\alpha)=+\infty$.

Επομένως η συνεχής(πράξεις συνεχών) στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση g έχει σύνολο τιμών το $(-\alpha,+\infty)$, $\alpha>0$. Είναι $0\in g(A)$ με $A=(0,+\infty)$, άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$ αφού η g είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό.

ii) $g(1)=0 \Leftrightarrow 2e-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=2e$, συνεπώς $f(x)=e^{x^2}-1+\frac{2e}{x}$, $x>0$ και $f'(x)=2xe^{x^2}-\frac{2e}{x^2}$, $x>0$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $(f'(x))'=(2xe^{x^2})'-2e\left(\frac{1}{x^2}\right)'=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}+\frac{4e}{x^3}$, επομένως $f''(x)>0$ για κάθε $x>0$,δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $g(1)=0 \overset{\upsilon\pi\acute{o}\theta.}{\Leftrightarrow} f'(1)=0$, άρα:

- Για $0<x<1$ έχουμε $f'(x)<f'(1) \Leftrightarrow f'(x)<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ (αφού είναι και συνεχής στο $(0,1]$).
- Για $x>1$ έχουμε $f'(x)>f'(1) \Leftrightarrow f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ (αφού είναι και συνεχής στο $[1,+\infty)$).

Συνεπώς η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=1$ το $f(1)=3e-1>0$. Ακόμη:

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(e^{x^2}-1+\frac{2e}{x}\right)=+\infty$ αφού $\lim_{x\to0}\frac{2e}{x}=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x^2}-1+\frac{2e}{x}\right)=+\infty$ αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{2e}{x}=0$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[3e-1,+\infty)$ και $f(x)>0$ αφού για κάθε $x>0$ ισχύει: $f(x)\geq 3e-1>0$.

iii) $f(x)=e^{x^2}-1+\frac{2e}{x}$, $x>0$.

α) Η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[1,e]\subset(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(1,e)$ με $f'(x)=2xe^{x^2}-\frac{2e}{x^2}$. Επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}$ δηλαδή η εφαπτομένη ευθεία στη C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη στην ευθεία AB αφού $f(1)=3e-1$ και $\lambda_{AB}=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}$ (γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ.)

β) Είναι $f'(\xi)=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}=\frac{e^{e^2}+1-3e+1}{e-1}=\frac{e^{e^2}-3e+2}{e-1}$.

Ακόμη από iii (α) έχουμε $1<\xi<e$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα από (ii) άρα:

$$f'(1)<f'(\xi)<f'(e) \Leftrightarrow 0<\frac{e^{e^2}-3e+2}{e-1}<2e^{e^2+1}-\frac{2}{e}.$$

Θέμα 2°

Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)=2\left(1-e^{x-f(x)}\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=\ell n3$.

i) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h με $h(x)=e^{f(x)-x}-2$ και να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(e^x+2\right)+x,\ x\in\mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο Α(0, f(0)).

iii) Να δείξετε ότι ισχύει $\ell n\left(\dfrac{e^x+2}{3}\right)>\dfrac{1}{3}x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

iv) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Λύση

i) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f(x)-x$ και e^x-2, οπότε:

$$h'(x)=\left(e^{f(x)-x}-2\right)'=\left(e^{f(x)-x}\right)'=e^{f(x)-x}\left(f(x)-x\right)'=e^{f(x)-x}\left(f'(x)-1\right)(1).$$

Όμως $f'(x)=2\left(1-e^{x-f(x)}\right)(2)$, άρα από (1),(2): $h'(x)=e^{f(x)-x}\left(2-2e^{x-f(x)}-1\right)\Leftrightarrow h'(x)=e^{f(x)-x}\left(1-2e^{x-f(x)}\right)$

$\Leftrightarrow h'(x)=e^{f(x)-x}-2\Leftrightarrow h'(x)=h(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $h(x)=ce^x$, $c\in\mathbb{R}$ (3).

Είναι $h(x)=e^{f(x)-x}-2\overset{(3)}{\Leftrightarrow}ce^x=e^{f(x)-x}-2$, που για $x=0$ γίνεται $c=e^{f(0)}-2\overset{\text{υπόθ.}}{\Leftrightarrow}c=e^{\ell n3}-2\Leftrightarrow c=1$.

Συνεπώς θα ισχύει $e^x=e^{f(x)-x}-2\Leftrightarrow e^{f(x)-x}=e^x+2\Leftrightarrow\ell n\left(e^{f(x)-x}\right)=\ell n\left(e^x+2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-x=\ell n\left(e^x+2\right)\Leftrightarrow f(x)=\ell n\left(e^x+2\right)+x,\ x\in\mathbb{R}$.

ii) Είναι $f(x)=\ell n\left(e^x+2\right)+x$, άρα $f'(x)=\left[\ell n\left(e^x+2\right)+x\right]'=\left[\ell n\left(e^x+2\right)\right]'+(x)'=\dfrac{e^x}{e^x+2}+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αφού $\dfrac{e^x}{e^x+2}$ είναι πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$.

Έτσι $\left(f'(x)\right)'=\left(\dfrac{e^x}{e^x+2}+1\right)'\Leftrightarrow f''(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+2\right)-e^xe^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+2\right)^2}>0,\ x\in\mathbb{R}$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$,

επομένως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,\ell n3)$ είναι

$y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{3}x+\ell n3$, αφού $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}+1$, όπου για $x=0$ παίρνουμε: $f'(0)=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$.

iii) Είναι $\ell n\left(\dfrac{e^x+2}{3}\right)>\dfrac{1}{3}x\Leftrightarrow\ell n\left(e^x+2\right)-\ell n3>\dfrac{1}{3}x\Leftrightarrow\ell n\left(e^x+2\right)+x>\dfrac{4}{3}x+\ell n3\Leftrightarrow f(x)>\dfrac{4}{3}x+\ell n3$,

που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, αφού η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της $\varepsilon: y=\dfrac{4}{3}x+\ell n3$ σε κάθε σημείο (λόγω του ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$) εκτός του σημείου επαφής $A(0,\ell n3)$ όπου $C_f\equiv\varepsilon$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει $\ell n\left(\dfrac{e^x+2}{3}\right)>\dfrac{1}{3}x$.

iv) Για $x>0$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ell n\left(e^x+2\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\dfrac{\ell n\left(e^x+2\right)}{x}\right]$ (4).

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell n\left(e^x+2\right)}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{D.L.H}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\ell n\left(e^x+2\right)\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{e^x}}=1$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$.

Άρα από (4) είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1+1=2$. Ακόμη για $x>0$ έχουμε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\ell n\left(e^x+2\right)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ell n\left(e^x+2\right)-x\right)\overset{+\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ell n\left(e^x+2\right)-\ell ne^x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ell n\dfrac{e^x+2}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ell n\left(1+\dfrac{2}{e^x}\right)\right]=\ell n1=0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$.

Συνεπώς η ευθεία $y=2x$ είναι ασύμπτωτη (πλάγια) της C_f στο $+\infty$.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΜΠΑΡΤΕΛ ΛΕΕΝΤΕΡΤ ΒΑΝ ΝΤΕΡ ΒΑΡΝΤΕΝ (1903-1996)

Ολλανδός μαθηματικός με μεγάλη προσφορά στην επιστήμη του χάρη στις πάμπολλες εργασίες που δημοσίευσε για την άλγεβρα, την αλγεβρική γεωμετρία, τη στατιστική, την ιστορία των μαθηματικών. Υπήρξε στέλεχος της «γερμανικής» σχολής μαθηματικών, αφού σπούδασε δίπλα στον Έμιλ Άρτιν και την Έμι Νέτερ. Το μεγαλύτερο και σπουδαιότερο, εξάλλου, σύγγραμμά του ήταν η «Σύγχρονη Άλγεβρα» (1930-31), που δεν ήταν παρά η ενοποίηση της γερμανικής αλγεβρικής σκέψης, όπως αυτή είχε αναπτυχθεί από τους μεγάλους των αρχών του 20ου αιώνα, Χίλμπερτ, Ντέντεκιντ, Στάινιτς, Νέτερ και Άρτιν. Το βιβλίο αυτό αποτέλεσε τομή στην παρουσίαση των αλγεβρικών εννοιών και παραμένει ακόμη και σήμερα το πρότυπο για την διδασκαλία της άλγεβρας στα καλύτερα πανεπιστήμια του κόσμου.