ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΣ
ΞΑΝΘΗ ΒΑΣΙΛΑΚΟΥ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

- Αν $f: A \to \mathbb{R}$ και $(\alpha,\beta) \subseteq A$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$, όταν:
$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$$
- Αν $M(x(t),\psi(t))$ σημείο καμπύλης C, τότε $x'(t)$, $\psi'(t)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης και τεταγμένης αντιστοίχως του M

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Θέμα 1ο

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(-4)=2$, $f'(-4)=0$ και συνάρτηση g με $g(x)=\begin{cases} f(x-2) & , x<-2 \\ f(x^3+4) & , x\ge -2\end{cases}$

A. i) Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-2$

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ε στη C_g στο σημείο $M(-2,g(-2))$

B. Έστω σημείο $\Sigma(x,\psi)$ που κινούμενο στην ευθεία ε (κατά τη θετική φορά), απομακρύνεται από τον άξονα ψ'ψ με ρυθμό 3 $\frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{sec}}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $d=(K\Sigma)$ με $K(-2,0)$, την χρονική στιγμή κατά την οποία το Σ διέρχεται από το σημείο με τετμημένη $x_1=4$

Λύση

A. i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=-4$ με $f'(-4)=0$, άρα $\lim_{x\to -4^-}\frac{f(x)-f(-4)}{x+4}=\lim_{x\to -4^+}\frac{f(x)-f(-4)}{x+4}=0$, (1)

- Για $x>-2$ και κοντά στο -2, έχουμε: $\lim_{x\to -2^+}\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{f(x^3+4)-f(-4)}{x+2}$,

με $g(-2)=f\left((-2)^3+4\right)=f(-4)$. Θέτουμε $x^3+4=u$, οπότε $x\to -2^+ \Leftrightarrow u\to -4^+$

και $x^3=u-4$, άρα $x=-\sqrt[3]{4-u}$

Συνεπώς:
$$\lim_{x\to -2^+}\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}=\lim_{u\to -4^+}\frac{f(u)-f(-4)}{2-\sqrt[3]{4-u}}=\lim_{u\to -4^+}\frac{(f(u)-f(-4))\left[4+2\sqrt[3]{4-u}+\left(\sqrt[3]{4-u}\right)^2\right]}{\left(2-\sqrt[3]{4-u}\right)\left[4+2\sqrt[3]{4-u}+\left(\sqrt[3]{4-u}\right)^2\right]}=$$
$$=\lim_{u\to -4^+}\frac{f(u)-f(-4)}{8-\left(\sqrt[3]{4-u}\right)^3}\left[4+2\sqrt[3]{4-u}+\left(\sqrt[3]{4-u}\right)^2\right]=\lim_{u\to -4^+}\left(\frac{f(u)-f(-4)}{u+4}\right)\lim_{u\to -4^+}\left[4+2\sqrt[3]{4-u}+\left(\sqrt[3]{4-u}\right)^2\right]=$$
$$=f'(-4)(4+4+4)=12f'(-4)=0 \text{ (λόγω της (1))}$$

- Για $x<-2$ και κοντά στο -2, έχουμε: $\lim_{x\to -2^-}\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{f(x-2)-f(-4)}{x+2}$, με $g(-2)=f(-4)$

Θέτουμε $x-2=t$, οπότε $x\to -2^- \Leftrightarrow t\to -4^-$ και $x=t+2$

Επομένως:
$$\lim_{x\to -2^-}\frac{g(x)-g(-2)}{x+2}=\lim_{t\to -4^-}\frac{f(t)-f(-4)}{t+4}=f'(-4)=0 \text{ (λόγω της (1))}$$

Συνεπώς η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=-2$ με $g'(-2)=0$

ii) Είναι (ε): $\psi-g(-2)=g'(-2)(x+2)$ με $g(-2)=f(-4)=2$ (από υπόθεση)

και $g'(-2)=0$ (από Ai), οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ε στη C_g, είναι (ε): $\psi=2$

B. Ισχύει: $d=(K\Sigma)=\sqrt{(x+2)^2+\psi^2}$,

οπότε, για $x=x(t)$, $\psi=\psi(t)$ έχουμε, $d(t)=\sqrt{\left(x(t)+2\right)^2+\psi^2(t)}$

Παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς t, παίρνουμε $d'(t)=\frac{(x(t)+2)x'(t)+\psi(t)\psi'(t)}{\sqrt{(x(t)+2)^2+\psi^2(t)}}$, (2)

Είναι $x'(t)=3\ \frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{sec}}$ και $\psi'(t)=0$, αφού το Σ κινείται στην (ε): $\psi=2$ (από Aii)

Για $t=t_0$, έχουμε:

$x(t_0)=x_1=4$ και $\psi(t_0)=2$, έτσι η (2) για $t=t_0$, γίνεται:
$$d'(t_0)=\frac{(x(t_0)+2)x'(t_0)+\psi(t_0)\psi'(t_0)}{\sqrt{(x(t_0)+2)^2+\psi^2(t_0)}}=\frac{(4+2)3+2\cdot 0}{\sqrt{(4+2)^2+2^2}}=\frac{18}{\sqrt{40}}=\frac{9\sqrt{10}}{10}\ \frac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{sec}}.$$

Θέμα 2°

Έστω συνάρτηση $f:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία:

$f(x\psi)=f(x)+f(\psi)+x\psi-x-\psi$, για κάθε $x,\psi\in(0,\ +\infty)$ και $f'(1)=2$

Α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$

Β. Αν η συνάρτηση $g:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $g(2x^2+x+1)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε, στη C_g στο σημείο $M(2,g(2))$

Γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης σημείου $K\in\varepsilon$, αν η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό $\frac{3}{4}\frac{cm}{sec}$

Λύση

Α. Στη σχέση $f(x\psi)=f(x)+f(\psi)+x\psi-x-\psi$, θέτουμε $x=\psi=1$ και έχουμε: $f(1)=f(1)+f(1)+1-1-1$, άρα $f(1)=1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, με $f'(1)=2$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2\overset{f(1)=1}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=2,\ (1)$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x_0\in(0,\ +\infty)$ με $x_0\neq1$, ισχύει:

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to1}\frac{f(x_0h)-f(x_0)}{x_0h-x_0}\in\mathbb{R},\ (2)$, όπως προκύπτει, αν θέσουμε $x=x_0h$, οπότε $x\to x_0\Leftrightarrow h\to1$

Έτσι, η f θα είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$

Στη σχέση $f(x\psi)=f(x)+f(\psi)+x\psi-x-\psi$, θέτουμε όπου $x=x_0,\ \psi=h$ και έχουμε:

$f(x_0h)=f(x_0)+f(h)+x_0h-x_0-h,\ (3)$

Συνεπώς η σχέση (2), λόγω της σχέσης (3), γράφεται

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to1}\frac{f(x_0)+f(h)+x_0h-x_0-h-f(x_0)}{x_0(h-1)}=\lim_{h\to1}\frac{f(h)+x_0h-x_0-h}{x_0(h-1)}=$$

$$\frac{1}{x_0}\lim_{h\to1}\frac{f(h)+x_0h-x_0-h}{h-1}=\frac{1}{x_0}\lim_{h\to1}\frac{f(h)-1+x_0h-x_0-h+1}{h-1}=\frac{1}{x_0}\lim_{h\to1}\left[\frac{f(h)-1}{h-1}+\frac{1-h}{h-1}+\frac{x_0(h-1)}{h-1}\right]=$$

$$\frac{1}{x_0}\lim_{h\to1}\left[\frac{f(h)-1}{h-1}-1+x_0\right]\overset{(1)}{=}\frac{1}{x_0}(2-1+x_0)=\left(\frac{1}{x_0}+1\right)\in\mathbb{R}$$

Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$, με $f'(x)=\frac{1}{x}+1,\ x>0$

Β. Στην ισότητα $g(2x^2+x+1)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$, θέτουμε $x=\frac{1}{2}$ και έχουμε $g(2)=f(1)=1$

Ακόμη, οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $(0,\ +\infty)$,

επομένως η ισότητα: $g(2x^2+x+1)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$,

αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις (ως συνθέσεις παραγωγισίμων συναρτήσεων).

Παραγωγίζοντας τα μέλη της $g(2x^2+x+1)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$, έχουμε:

$$\left[g(2x^2+x+1)\right]'=\left[f\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]'\Leftrightarrow g'(2x^2+x+1)(2x^2+x+1)'=f'\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)'\Leftrightarrow$$

$$g'(2x^2+x+1)(4x+1)=f'\left(x+\frac{1}{2}\right),\ (4).$$

Για $x=\frac{1}{2}$, η (4) δίνει: $g'(2)\cdot3=f'(1)\overset{f'(1)=2}{\Leftrightarrow}g'(2)=\frac{2}{3}$

Η εξίσωση εφαπτομένης στη C_g στο σημείο $M(2,g(2))$, είναι:

$(\varepsilon):\ \psi-g(2)=g'(2)(x-2)$, που γίνεται (αφού: $g(2)=1,\ g'(2)=\frac{2}{3}$),

$(\varepsilon):\ \psi-1=\frac{2}{3}(x-2)$, άρα $(\varepsilon):\ \psi=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

Γ. Αν $x=x(t)$ (τετμημένη του Κ) και $\psi=\psi(t)$ (τεταγμένη του Κ), τότε: $\psi(t)=\frac{2}{3}x(t)-\frac{1}{3}$,

οπότε, $\psi'(t)=\frac{2}{3}x'(t)=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}\frac{cm}{sec}$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΚΑΡΛ ΤΕΟΝΤΟΡ ΒΑΪΕΡΣΤΡΑΣ (1815-1897)

Γερμανός μαθηματικός, από τους κυριότερους θεμελιωτές της σύγχρονης Μαθηματικής Ανάλυσης. Σπούδασε μαθηματικά κοντά στον Κρίστοφ Γκούντερμαν και η πρώτη προσωπική του έρευνα για τις αλγεβρικές διαφορικές εξισώσεις τον οδήγησε στην περίφημη αρχή της «αναλυτικής επέκτασης». Ο διδακτορικός τίτλος που του αποδόθηκε το 1854 σήμανε την πρώτη αναγνώριση. Σε δυο χρόνια είχε γίνει μέλος της Ακαδημίας του Βερολίνου. Ασχολούμενος τότε με τις αναλυτικές συναρτήσεις έφτασε σε μακράς πνοής εργασίες όπως στο «λογισμό των μεταβολών» και στην εύρεση ικανών συνθηκών για «ισχυρά ακρότατα». Υπήρξε ο εισηγητής της έννοιας των «στοιχειωδών διαιρετών», ενώ ερεύνησε και τις προσεγγιστικές συναρτήσεις πραγματικής ή μιγαδικής μεταβλητής. Η αυστηρότητα και η λιτότητα που διέκριναν τις γραπτές εργασίες του είχαν πλήρη συνάφεια και με τις πανεπιστημιακές παραδόσεις του. Οι μαρτυρίες μιλούν για ένα αριστοτέχνη δάσκαλο με απίστευτη χάρη στη μεταδοτικότητα του λόγου του.