ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΦΥΣΙΚΗ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΣΥΝΟΔΙΝΟΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΤΩΠΟΔΗΣ
ΤΑΣΟΣ ΓΡΕΤΟΣ
ΝΙΚΟΣ ΜΠΡΙΓΓΟΣ

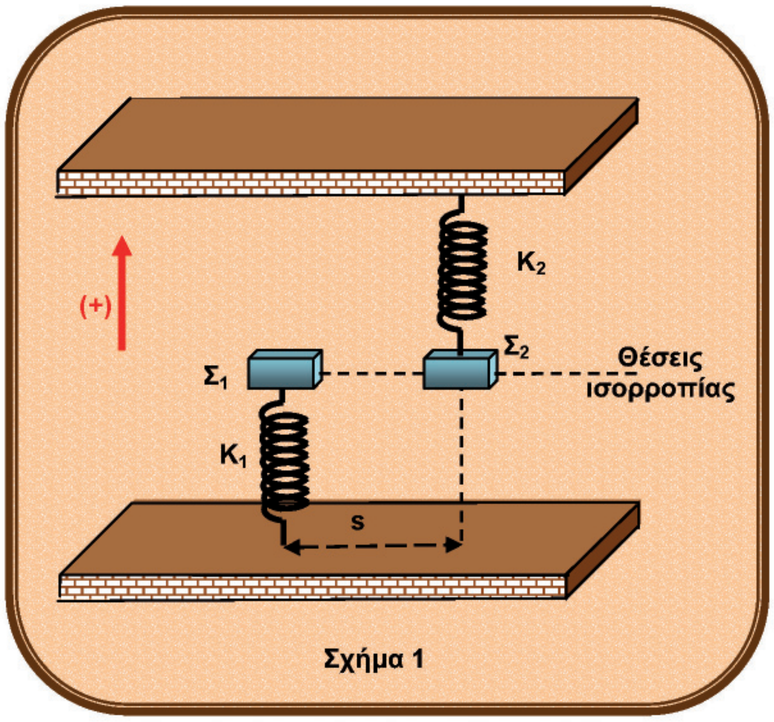
"

Αν η απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας ενός σώματος δίνεται από τη σχέση x = Αημ(ωt+φ) η κίνηση του σώματος ονομάζεται απλή αρμονική ταλάντωση. Η απλή αρμονική ταλάντωση είναι μια ειδική περίπτωση γραμμικής ταλάντωσης.

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Ένα σώμα $Σ_1$ μάζας m_1 = 2Kg ισορροπεί στερεωμένο στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου (1) σταθεράς K_1 = 50N/m. Ένα δεύτερο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2 ισορροπεί στερεωμένο στο κάτω άκρο ενός δεύτερου κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου (2) σταθεράς K_2 = 200N/m. Τα σώματα ισορροπούν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και οι διευθύνσεις των ελατηρίων απέχουν μεταξύ τους κατά s = 0,2m όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Εκτρέπουμε το σώμα $Σ_1$ κατακόρυφα προς τα κάτω κατά d = 0,4m και τη χρονική στιγμή t = 0 το αφήνουμε ελεύθερο. Την ίδια χρονική στιγμή εκτοξεύουμε το σώμα $Σ_2$ κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $\vec{υ}_o$. Κάθε ένα από τα δύο σώματα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Το σώμα $Σ_2$ ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά στη θέση όπου το ελατήριο (2) αποκτά το φυσικό του μήκος ενώ το σώμα $Σ_1$ ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά σε θέση η οποία βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (2).



Σχήμα 1

α) Να υπολογίσετε την μάζα m_2 του σώματος $Σ_2$.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης $\vec{υ}_o$.

γ) Να υπολογίσετε το λόγο της μέγιστης δύναμης του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ,1}$ που ασκείται στο σώμα $Σ_1$ προς τη μέγιστη δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_{ελ,2}$ που ασκείται στο σώμα $Σ_2$.

δ) Να υπολογίστε τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ είναι $υ_1 = +\sqrt{2}$ m/s για πρώτη φορά και την απόσταση των δύο σωμάτων την ίδια χρονική στιγμή.

Ένα σώμα $Σ_3$ εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις πάνω στην ίδια διεύθυνση και γύρω από το ίδιο σημείο. Οι χρονικές εξισώσεις των απομακρύνσεων από τη θέση ισορροπίας συμπίπτουν με τις αντίστοιχες εξισώσεις των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$.

ε) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σώματος $Σ_3$.

Δίνεται: $g = 10m/s^2$.

Θεωρήστε αμελητέες τις διαστάσεις των σωμάτων και θετική φορά τη φορά προς τα πάνω.

Λύση

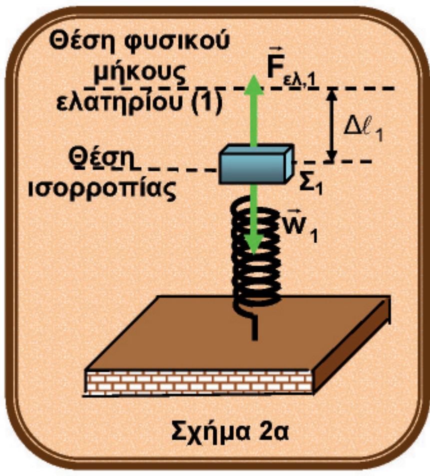
α) Σε κάθε ένα από τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ όταν βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

- το βάρος ($\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, αντίστοιχα)
- η δύναμη του ελατηρίου ($\vec{F}_{ελ,1}$, $\vec{F}_{ελ,2}$, αντίστοιχα)

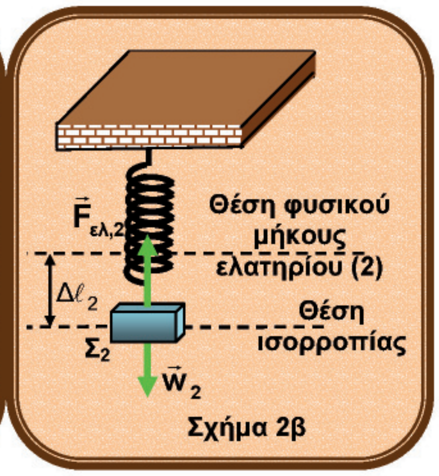
Από τον 1ο νόμο του Newton για το σώμα $Σ_1$ προκύπτει:

$F = 0$ ή $w_1 = F_{ελ,1}$ ή

$m_1 g = K_1 \cdot Δ\ell_1$ ή $Δ\ell_1 = \frac{m_1 g}{K_1}$ ή



Σχήμα 2α



Σχήμα 2β

$Δ\ell_1$ = 0,4m, όπου $Δ\ell_1$ η παραμόρφωση του ελατηρίου (1).

Ομοίως για το σώμα $Σ_2$ προκύπτει:

$m_2 g = K_2 \cdot Δ\ell_2$ ή $m_2 = \frac{K_2 Δ\ell_2}{g}$ ***(1)***, όπου $Δ\ell_2$ η παραμόρφωση του ελατηρίου (2).

Το σώμα $Σ_1$ αρχίζει να ταλαντώνεται από την ακραία αρνητική θέση ($x_1 = -A_1 = -d$) της ταλάντωσης του και η θέση όπου ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά μετά την χρονική στιγμή t = 0 αποτελεί την ακραία θετική θέση. Η θέση αυτή βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τη θέση όπου το ελατήριο (2) αποκτά το φυσικό του μήκος και συνεπώς ισχύει: $d = Δ\ell_2$ ***(2)***. Η σχέση ***(1)*** μέσω της σχέσης ***(2)*** γίνεται: $m_2 = K_2 d/g$ ή $\mathbf{m_2 = 8Kg}$.

β) Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του σώματος $Σ_2$ είναι: $\omega_2 = \sqrt{K_2/m_2}$ ή $\omega_2 = 5$rad/s ενώ το πλάτος της ταλάντωσης του: $A_2 = \Delta\ell_2 = d$ ή $A_2 = 0{,}4$m.

Για το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης $\vec{\upsilon}_o$ ισχύει: $\upsilon_o = \upsilon_{max}$ ή $\upsilon_o = \omega_2 A_2$ ή **υ_o = 2m/s**.

γ) Κάθε ένα από τα δύο σώματα δέχεται από το ελατήριο στο οποίο είναι στερεωμένο δύναμη μέγιστου μέτρου όταν βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης του, δηλαδή στις θέσεις $x_1 = -A_1 = -d = -0{,}4$m και $x_2 = -A_2 = -d = -0{,}4$m για τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ αντίστοιχα.
Για το σώμα $Σ_1$ τότε το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου είναι: $F_{ελ,1(max)} = K_1 2d$ ***(3)*** και ομοίως για το σώμα $Σ_2$ $F_{ελ,2(max)} = K_2 2d$ ***(4)***.
Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις ***(3)*** και ***(4)*** , προκύπτει:

$$\frac{F_{ελ,1(max)}}{F_{ελ,2(max)}} = \frac{K_1 2d}{K_2 2d} = \frac{K_1}{K_2} \text{ ή } \frac{\mathbf{F_{ελ,1(max)}}}{\mathbf{F_{ελ,2(max)}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}.$$

δ) Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος $Σ_1$ από τη θέση ισορροπίας του είναι της μορφής:
$x_1 = A_1 ημ(\omega_1 t + \varphi_{o1})$ ***(5)***

Για t = 0 είναι $x_1 = -A_1 = -0{,}4$m και η σχέση ***(5)*** γίνεται: $-A_1 = A_1 ημ\varphi_{o1}$ ή $\varphi_{o1} = \frac{3\pi}{2}$rad

Ισχύει: $\omega_1 = \sqrt{K_1/m_1}$ ή $\omega_1 = 5$rad/s

Η σχέση ***(5)*** τελικά γράφεται: $x_1 = 0{,}4ημ\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right)$ (S.I.) ***(6)***

και για την ταχύτητα της ταλάντωσης του σώματος $Σ_1$ προκύπτει:

$\upsilon_1 = \omega_1 A_1 συν(\omega_1 t + \varphi_{o1})$ ή $\upsilon_1 = 2συν\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right)$ (S.I.) ***(7)***

Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος $Σ_2$ από τη θέση ισορροπίας του είναι της μορφής:
$x_2 = A_2 ημ(\omega_2 t + \varphi_{o2})$.
Για το σώμα $Σ_2$ την t = 0 είναι: $x_2 = 0$ και $\upsilon_2 = +\upsilon_o > 0$.
Ομοίως προκύπτει η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας: $x_2 = 0{,}4ημ(5t)$ (S.I.) ***(8)***

Τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\upsilon_1 = +\sqrt{2}$ m/s και από τη σχέση ***(7)*** προκύπτει: $2συν\left(5t_1 + \frac{3\pi}{2}\right) = +\sqrt{2}$ ή

$συν\left(5t_1 + \frac{3\pi}{2}\right) = συν\frac{7\pi}{4}$ ή $\mathbf{t_1 = \frac{\pi}{20}}$ **s.**

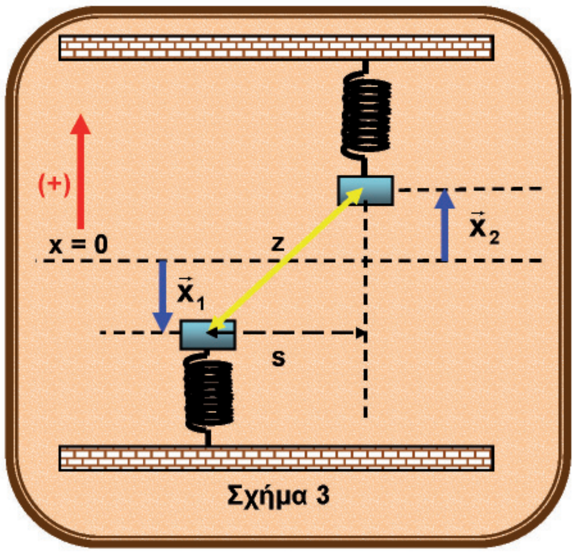
Οι απομακρύνσεις των δύο σωμάτων από τις θέσεις ισορροπίας τους τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

- για το σώμα $Σ_1$: $x_1 = 0{,}4ημ\left(5t_1 + \frac{3\pi}{2}\right)$ m ή

  $x_1 = 0{,}4ημ\left(5\frac{\pi}{20} + \frac{3\pi}{2}\right)$ m ή $x_1 = -0{,}2\sqrt{2}$ m

- για το σώμα $Σ_2$: $x_2 = 0{,}4ημ(5t_1)$ m ή

  $x_2 = 0{,}4ημ\left(5\frac{\pi}{20}\right)$ m ή $x_2 = +0{,}2\sqrt{2}$ m



Σχήμα 3

Η ζητούμενη απόσταση z των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $z = \sqrt{(x_2 + |x_1|)^2 + s^2}$ ή **z = 0,6m**.

ε) Είναι $\varphi_{o1} = \frac{3\pi}{2}$rad, $\varphi_{o2} = 0$rad και $A_1 = A_2 = 0{,}4$m.

Έτσι προκύπτει: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συν\varphi_{o1}}$ ή $A = 0{,}4\sqrt{2}$ m και $εφθ = \frac{A_1 ημ\varphi_{o1}}{A_2 + A_1 συν\varphi_{o1}}$ ή $θ = \frac{7\pi}{4}$ rad.

Άρα η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος $Σ_3$ είναι: $\upsilon = \omega A συν(\omega t + θ)$ ή $\upsilon = 2\sqrt{2}\,συν\left(5t + \frac{7\pi}{4}\right)$ (S.I.)

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΙΣΑΑΚ ΝΕΥΤΩΝ (1642-1727)

Μια από τις σημαντικότερες μορφές των θετικών επιστημών που ανέδειξε η Αγγλία και η ανθρωπότητα. Σε ηλικία μόλις 23 ετών, απόφοιτος του Κέιμπριτζ ο Isaak Newton διατύπωσε τον περιώνυμο νόμο της βαρύτητας, που έβαλε τα θεμέλια της Κλασικής Φυσικής. Το 1687 δημοσίευσε το κορυφαίο έργο του, «Philosophiae naturalis principia mathematica», στο οποίο παραθέτει εκτός από το νόμο της βαρύτητας και τα τρία μνημειώδη αξιώματα της κίνησης. Το αυστηρά δομημένο αυτό έργο αποκαλύπτει τις επιρροές του από τη φιλοσοφία του Αριστοτέλη, τη γεωμετρία του Ευκλείδη και του Ντεκάρτ, τις παρατηρήσεις του Κέπλερ και του Γαλιλαίου για το φως και τους πλανήτες. Αφού θεμελιώνει τη Μηχανική εισάγει μια κοσμολογική άποψη για τη βαρύτητα (ο νόμος της παγκόσμιας έλξης) η οποία επιβλήθηκε στην επιστημονική κοινότητα, ώσπου την αναθεώρησαν οι μαθηματικές μελέτες των Καραθεοδωρή-Άινστάιν και εν τέλει η γενική θεωρία της σχετικότητας. Ιστορικής επιστημονικής σημασίας ήταν και η συμβολή του στη θεμελίωση των μοντέρνων μαθηματικών και συγκεκριμένα του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, ανεξάρτητα από τη διαμάχη για την πατρότητα των σχετικών ανακαλύψεων με τον Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς.