ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΝΟΥΛΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lambda>0$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lambda<0$ τότε και $f(x)>0$ ή $f(x)<0$, για x κοντά στο x_0

- Έστω ότι για τις συναρτήσεις f , g ισχύουν: $|f(x)|\le\theta\in(0,+\infty)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$. Τότε $\lim_{x\to x_0}[g(x)f(x)]=0$

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim_{x\to\alpha}\left[f^3(x)-3\kappa f(x)\right]=8-6\kappa$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\kappa\le\frac{2}{3}$

α. Να δείξετε ότι $\lim_{x\to\alpha} f(x)=2$

β. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{f^2(x)+12}-\sqrt{f(x)+2}-f(x)}{2-f(x)}$$

Λύση

α. Είναι $\lim_{x\to\alpha}\left[f^3(x)-3\kappa f(x)\right]=8-6\kappa \Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha}\left[f^3(x)-3\kappa f(x)-8+6\kappa\right]=0$, (1)

Για x κοντά στο α έχουμε:

$f^3(x)-3\kappa f(x)-8+6\kappa=f^3(x)-8-3\kappa\left[f(x)-2\right]=\left[f(x)-2\right]\left[f^2(x)+2f(x)+4\right]-3\kappa\left[f(x)-2\right]=$

$\left[f(x)-2\right]\left[f^2(x)+2f(x)+4-3\kappa\right]$. Ισχύει $f^2(x)+2f(x)+4-3\kappa>0$, αφού $\Delta=4-16+12\kappa\Leftrightarrow\Delta=12(\kappa-1)<0$ μιας και $\kappa\le\frac{2}{3}$. Έτσι από $f^3(x)-3\kappa f(x)-8+6\kappa=\left[f(x)-2\right]\left[f^2(x)+2f(x)+4-3\kappa\right]$ έχουμε:

$$f(x)-2=\frac{f^3(x)-3\kappa f(x)-8+6\kappa}{f^2(x)+2f(x)+4-3\kappa}\Leftrightarrow f(x)-2=\frac{f^3(x)-3\kappa f(x)-8+6\kappa}{\left[f(x)+1\right]^2+(2-3\kappa)+1},\ (2)$$

Είναι: $\left[f(x)+1\right]^2\ge0$ και $\kappa\le\frac{2}{3}\Leftrightarrow 2-3\kappa\ge0$, άρα $\left[f(x)+1\right]^2+(2-3\kappa)+1\ge1\Leftrightarrow$

$0<\frac{1}{\left[f(x)+1\right]^2+(2-3\kappa)+1}\le1$, (3). Από (2) $|f(x)-2|=\frac{|f^3(x)-3\kappa f(x)-8+6\kappa|}{\left[f(x)+1\right]^2+(2-3\kappa)+1}$, που λόγω της (3) δίνει:

$|f(x)-2|\le|f^3(x)-3\kappa f(x)-8+6\kappa|$, οπότε: $-|f^3(x)-3\kappa f(x)-8+6\kappa|\le f(x)-2\le|f^3(x)-3\kappa f(x)-8+6\kappa|$

Λόγω της (1): $\lim_{x\to\alpha}\left(-|f^3(x)-3\kappa f(x)-8+6\kappa|\right)=\lim_{x\to\alpha}|f^3(x)-3\kappa f(x)-8+6\kappa|=0$, επομένως σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε $\lim_{x\to\alpha}\left[f(x)-2\right]=0\Leftrightarrow\lim_{x\to\alpha}f(x)=2$

β. Για $x\ne\alpha$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{f^2(x)+12}-\sqrt{f(x)+2}-f(x)}{2-f(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\alpha}\frac{\left(\sqrt{f^2(x)+12}-4\right)-\left(\sqrt{f(x)+2}-2\right)-\left(f(x)-2\right)}{-\left(f(x)-2\right)}=$$

$$\lim_{x\to\alpha}\left[-\frac{f^2(x)-4}{\left(f(x)-2\right)\left(\sqrt{f^2(x)+12}+4\right)}+\frac{f(x)-2}{\left(f(x)-2\right)\left(\sqrt{f(x)+2}+2\right)}+1\right]=\lim_{x\to\alpha}\left[-\frac{f(x)+2}{\sqrt{f^2(x)+12}+4}+\frac{1}{\sqrt{f(x)+2}+2}+1\right]=$$

$$-\frac{2+2}{\sqrt{4+12}+4}+\frac{1}{\sqrt{2+2}+2}+1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$

Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3(2-x)\text{ημ}\frac{\kappa}{(x-2)^5}+4|x-2|\text{συν}\frac{\lambda}{(2-x)^2}$ με $\kappa>0,\ \lambda>0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x\to2}f(x)$, β) $\lim_{x\to2}\frac{\text{ημ}(\text{ημ}f(x))}{f^2(x)+2f(x)}$, γ) $\lim_{x\to2}\frac{|f^2(x)-f(x)+2|-|f(x)+4|+2}{f^2(x)+f(x)+|2f(x)-5|-5}$

Λύση

α) Για x κοντά στο 2:

$$f(x)=3(2-x)\text{ημ}\frac{\kappa}{(x-2)^5}+4|x-2|\text{συν}\frac{\lambda}{(2-x)^2},\ \text{άρα}\ |f(x)|=\left|3(2-x)\text{ημ}\frac{\kappa}{(x-2)^5}+4|x-2|\text{συν}\frac{\lambda}{(2-x)^2}\right|$$

Όμως $\left|3(2-x)\text{ημ}\frac{\kappa}{(x-2)^5}+4|x-2|\text{συν}\frac{\lambda}{(2-x)^2}\right|\le\left|3(2-x)\text{ημ}\frac{\kappa}{(x-2)^5}\right|+\left|4|x-2|\text{συν}\frac{\lambda}{(2-x)^2}\right|$, άρα

$$|f(x)|\le\left|3(2-x)\text{ημ}\frac{\kappa}{(x-2)^5}\right|+\left|4|x-2|\text{συν}\frac{\lambda}{(2-x)^2}\right|=3|x-2|\left|\text{ημ}\frac{\kappa}{(x-2)^5}\right|+4|x-2|\left|\text{συν}\frac{\lambda}{(2-x)^2}\right|$$

Είναι $3|x-2|\left|\text{ημ}\frac{\kappa}{(x-2)^5}\right|+4|x-2|\left|\text{συν}\frac{\lambda}{(2-x)^2}\right|\le 3|x-2|\cdot 1+4|x-2|\cdot 1$, επομένως: $|f(x)|\le 7|x-2|$, ισοδύναμα $-7|x-2|\le f(x)\le 7|x-2|$. Όμως $\lim\limits_{x\to 2}\left(-7|x-2|\right)=\lim\limits_{x\to 2}7|x-2|=0$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε: $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$

β) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\text{ημ}(\text{ημ}f(x))}{f^2(x)+2f(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{\text{ημ}(\text{ημ}f(x))}{\text{ημ}f(x)}\cdot\frac{\text{ημ}f(x)}{f(x)(f(x)+2)}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{\text{ημ}(\text{ημ}f(x))}{\text{ημ}f(x)}\cdot\frac{\text{ημ}f(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{f(x)+2}\right]$

Για x κοντά στο 2 έστω $f(x)=y$, άρα $\text{ημ}f(x)=\text{ημ}y$ και $x\to 2\Leftrightarrow y\to 0$. Οπότε $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\text{ημ}f(x)}{f(x)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\text{ημ}y}{y}=1$

Επίσης για y κοντά στο 0 έστω $\text{ημ}y=u$, άρα $\text{ημ}(\text{ημ}f(x))=\text{ημ}(\text{ημ}y)=\text{ημ}u$ και $y\to 0\Leftrightarrow u\to 0$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\text{ημ}(\text{ημ}f(x))}{\text{ημ}f(x)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\text{ημ}(\text{ημ}y)}{\text{ημ}y}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\text{ημ}u}{u}=1$. Επομένως: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\text{ημ}(\text{ημ}f(x))}{f^2(x)+2f(x)}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{\text{ημ}(\text{ημ}f(x))}{\text{ημ}f(x)}\cdot\frac{\text{ημ}f(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{f(x)+2}\right]=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

γ) Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2}\left[f^2(x)-f(x)+2\right]=2>0$, $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)+4\right]=4>0$, $\lim\limits_{x\to 2}\left[2f(x)-5\right]=-5<0$, άρα για x κοντά στο 2:

$f^2(x)-f(x)+2>0$, $f(x)+4>0$, $2f(x)-5<0$, συνεπώς $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left|f^2(x)-f(x)+2\right|-\left|f(x)+4\right|+2}{f^2(x)+f(x)+\left|2f(x)-5\right|-5}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(f^2(x)-f(x)+2\right)-\left(f(x)+4\right)+2}{f^2(x)+f(x)-\left(2f(x)-5\right)-5}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^2(x)-2f(x)}{f^2(x)-f(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{f(x)-1}=2$

Θέμα 3ο

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2f^5(x)+\kappa f^3(x)+f(x)=x^2-4$, $x\in\mathbb{R}$, $\kappa>0$

α. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=0$

β. Αν $g(x)=\text{ημ}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)f(x)+\frac{5}{f^2(x)}$, να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to -2}g(x)$, ii) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{e^{g(x)+2}-2\cdot 3^{g(x)}}{3^{g(x)+1}+e^{g(x)}}$

Λύση

α. Είναι:

$2f^5(x)+\kappa f^3(x)+f(x)=x^2-4$, άρα $f(x)\left(2f^4(x)+\kappa f^2(x)+1\right)=x^2-4\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2-4}{2f^4(x)+\kappa f^2(x)+1}$,

αφού $2f^4(x)+\kappa f^2(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή $2f^4(x)+\kappa f^2(x)+1\ge 1$, θα ισχύει $\frac{1}{2f^4(x)+\kappa f^2(x)+1}\le 1$

άρα $|f(x)|=\frac{\left|x^2-4\right|}{2f^4(x)+\kappa f^2(x)+1}\le\left|x^2-4\right|$. Επομένως $|f(x)|\le\left|x^2-4\right|\Leftrightarrow -\left|x^2-4\right|\le f(x)\le\left|x^2-4\right|$ με

$\lim\limits_{x\to -2}\left(-\left|x^2-4\right|\right)=\lim\limits_{x\to -2}\left|x^2-4\right|=0$. Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε: $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=0$

β. i) Για x κοντά στο -2:

$\left|\text{ημ}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)f(x)\right|=\left|\text{ημ}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)\right|\left|f(x)\right|\le 1\cdot\left|f(x)\right|$, άρα $-\left|f(x)\right|\le\text{ημ}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)f(x)\le\left|f(x)\right|$ με

$\lim\limits_{x\to -2}\left(-\left|f(x)\right|\right)=\lim\limits_{x\to -2}f(x)=0$. Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to -2}\text{ημ}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)f(x)=0$

Ακόμη $\lim\limits_{x\to -2}\frac{5}{f^2(x)}=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to -2}f^2(x)=0$ με $f^2(x)>0$ κοντά στο -2

Επομένως $\lim\limits_{x\to -2}g(x)=\lim\limits_{x\to -2}\left[\text{ημ}\left(\frac{x+5}{x+2}\right)f(x)+\frac{5}{f^2(x)}\right]=+\infty$

ii) Για x κοντά στο -2 έστω $g(x)=u$, άρα $x\to -2\Leftrightarrow u\to +\infty$ και τότε: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{e^{g(x)+2}-2\cdot 3^{g(x)}}{3^{g(x)+1}+e^{g(x)}}=\lim\limits_{u\to +\infty}\frac{e^{u+2}-2\cdot 3^{u}}{3^{u+1}+e^{u}}=$

$\lim\limits_{u\to +\infty}\frac{e^{u+2}-2\cdot 3^{u}}{3^{u+1}+e^{u}}=\lim\limits_{u\to +\infty}\frac{\left(\frac{e}{3}\right)^u e^2-2}{3+\left(\frac{e}{3}\right)^u}=\frac{0\cdot e^2-2\cdot 1}{3+0}=-\frac{2}{3}$, αφού $\lim\limits_{u\to +\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^u=0$ επειδή $\frac{e}{3}<1$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΛΕΟΝΑΡΝΤ ΟΪΛΕΡ (1707-1783)

Κορυφαίος Ελβετός μαθηματικός με ευρετική ικανότητα και πλούσιο συγγραφικό έργο. Σπούδασε Θεολογία και Ιατρική στο Πανεπιστήμιο της γενέτειράς του Βασιλείας, αλλά διέπρεψε ως μαθηματικός και γεωμέτρης στην αυλή του τσάρου της Ρωσίας και μέλος της Ακαδημίας Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης, η οποία εξέδωσε και τα πρώτα έργα του. Υπήρξε ο εμπνευστής διαφόρων συμβολισμών που χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα όπως ο συμβολισμός της συνάρτησης f(x), Σ για την άθροιση, e για τη βάση των φυσικών λογαρίθμων, i για τη φανταστική μονάδα - ρίζα του αριθμού 1 - ενώ καθιέρωσε και τον παλιό συμβολισμό π για τον λόγο της περιφέρειας προς τη διάμετρό της. Στον τομέα της μαθηματικής ανάλυσης ο Όιλερ συνέγραψε ογκώδεις τόμους, όπου συγκεντρώνει συστηματικά όλο το υλικό περασμένων αιώνων και εισάγει νέα εξαγόμενα (π.χ. το δίτομο «Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση»). Σημαντικό έργο άφησε ο Όιλερ και στον τομέα της αριθμοθεωρίας. Σ' αυτόν οφείλεται η πρώτη δημοσιευμένη απόδειξη για το «μικρό θεώρημα του Φερμά», ενώ εντυπωσιακή υπήρξε η θεώρησή του στη συνάρτηση «ζήτα» και στον συσχετισμό της με τη θεωρία των πρώτων αριθμών. Η «ευθεία του Όιλερ» και ο «κύκλος του Όιλερ» είναι οι κυριότερες σφραγίδες που άφησε ως ο διαπρεπέστερος μαθηματικός που προώθησε στο 18ο αιώνα τη στοιχειώδη γεωμετρία.