ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ

- Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in D_f$, όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Για την παράγωγο της σύνθεσης της συνάρτησης g με την συνάρτηση f ισχύει: $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 1°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{4 - \kappa x}{x + 1}$, $\kappa \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $M(1,\ 1)$

A Να βρείτε:

i Την τιμή του πραγματικού αριθμού κ

ii Τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε στην καμπύλη της f, που είναι παράλληλες στην ευθεία (η): $y = -\dfrac{3}{8}x + 13$

B Έστω η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x+4}$, $x > -1$. Να βρείτε:

i Την τιμή του $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(f(2+h)) - g(f(2))}{h}$

ii Την εξίσωση της εφαπτομένης στη καμπύλη της $g(f(x))$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$

iii Την τιμή του $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3 - g(x)}{x^2 - 3x - 10}$

Λύση

A i Η f ορίζεται όταν $x \neq -1$, άρα το πεδίο ορισμού της είναι $A = \mathbb{R} - \{-1\}$. Το $M(1,\ 1)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f, τότε: $f(1) = 1$, δηλαδή $\dfrac{4 - \kappa}{2} = 1$, οπότε $4 - \kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 2$ και η $f(x)$ έχει τύπο $f(x) = \dfrac{4 - 2x}{x + 1}$, $x \neq -1$

ii Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της γραφικής παράστασης της f με μία από τις ζητούμενες ευθείες ε

Αφού η ε είναι παράλληλη με την η θα ισχύει $\lambda_\varepsilon = \lambda_\eta$, άρα $\lambda_\varepsilon = -\dfrac{3}{8}$, έτσι $f'(x_0) = -\dfrac{3}{8}$, (1) ($x_0 \neq -1$)

Όμως, $f'(x) = \dfrac{-2(x+1) - (4-2x)}{(x+1)^2} = -\dfrac{6}{(x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, οπότε από (1): $-\dfrac{6}{(x_0+1)^2} = -\dfrac{3}{8} \Leftrightarrow$

$(x_0+1)^2 = 16$, άρα $x_0 + 1 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 3$ ή $x_0 + 1 = -4 \Leftrightarrow x_0 = -5$, οι οποίες είναι δεκτές

<u>Εύρεση των εφαπτομένων ευθειών:</u>

- $f(3) = -\dfrac{1}{2}$ και η εφαπτομένη στο $A\left(3, -\dfrac{1}{2}\right)$ έχει εξίσωση $y = -\dfrac{3}{8}x + \beta$, άρα $-\dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{8} \cdot 3 + \beta \Leftrightarrow \beta = \dfrac{5}{8}$, επομένως ($\varepsilon_1$): $y = -\dfrac{3}{8}x + \dfrac{5}{8}$
- $f(-5) = -\dfrac{7}{2}$ και η εφαπτομένη στο $B\left(-5, -\dfrac{7}{2}\right)$ έχει εξίσωση $y = -\dfrac{3}{8}x + \beta$, άρα $-\dfrac{7}{2} = -\dfrac{3}{8}(-5) + \beta \Leftrightarrow$ $\beta = -\dfrac{43}{8}$, επομένως (ε_2): $y = -\dfrac{3}{8}x - \dfrac{43}{8}$

B i Ισχύει:

$\left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, που για $x = 2$ δίνει το ζητούμενο όριο, δηλαδή $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(f(2+h)) - g(f(2))}{h} =$ $g'(f(2)) \cdot f'(2)$. Η g είναι παραγωγίσιμη (για $x > -1$) με $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$ και $f(2) = 0$, άρα $g'(f(2)) = \dfrac{1}{4}$

Ακόμη (από Aii): $f'(2) = -\dfrac{6}{9} = -\dfrac{2}{3}$, συνεπώς η τιμή του ζητούμενου ορίου είναι $\dfrac{1}{4} \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{1}{6}$

ii $g(f(2)) = g(0) = 2$ και η εξίσωση εφαπτομένης στο $K(2,2)$ είναι $y = -\dfrac{1}{6}x + \beta$ (από Bi),

άρα $2 = -\dfrac{1}{6}2 + \beta \Leftrightarrow \beta = \dfrac{7}{3}$. Έτσι η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι $y = -\dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{3}$

iii Για $x \neq 5$ έχουμε:

$$\lim_{x \to 5} \frac{3 - g(x)}{x^2 - 3x - 10} = \lim_{x \to 5} \frac{3 - \sqrt{x+4}}{(x-5)(x+2)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 5} \frac{5 - x}{(x-5)(x+2)\left(3 + \sqrt{x+4}\right)} = \lim_{x \to 5}\left[-\frac{1}{(x+2)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}\right] = -\frac{1}{42}$$

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\lambda\sqrt{x+1}-2\lambda}{x^2-9}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Α Να βρείτε: **i** το πεδίο ορισμού A της f και **ii** τον πραγματικό αριθμό λ, όταν $\lim\limits_{x\to3}f(x)=\dfrac{1}{24}$

Β Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{3\ln^2x-3\ln x}{x\ln x-x}, & x\in(0,\ e)\cup(e,+\infty)\\[2mm] \dfrac{27f(0)}{e}, & x=e\end{cases}$$

α Για λ=1, να εξετάσετε αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο με τετμημένη $x_0=e$

β Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της g ως προς x, όταν x=1

γ Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $A(1,\ g(1))$

δ Να βρείτε τα διαστήματα που ανήκουν τα x, ώστε η γραφική παράσταση της g να βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x

Λύση

Α i Έχουμε:

$f(x)=\dfrac{\lambda\sqrt{x+1}-2\lambda}{x^2-9}$. Η f ορίζεται όταν $x+1\ge0\Leftrightarrow x\ge-1$ και $x^2-9\neq0$, άρα $x\neq-3,\ x\neq3$

Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι $A=[-1,\ 3)\cup(3,+\infty)$

ii Για $x\neq3$:

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\lambda\sqrt{x+1}-2\lambda}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{\lambda\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to3}\frac{\lambda\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to3}\frac{\lambda\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2-4\right]}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\lambda(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to3}\frac{\lambda}{(x+3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{\lambda}{24}.$$ Ισχύει $\lim\limits_{x\to3}f(x)=\dfrac{1}{24}$, οπότε: $\dfrac{\lambda}{24}=\dfrac{1}{24}\Leftrightarrow\lambda=1$

Β α Για $x\neq e$:

$\lim\limits_{x\to e}g(x)=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{3\ln^2x-3\ln x}{x\ln x-x}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{3\ln x(\ln x-1)}{x(\ln x-1)}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{3\ln x}{x}=\dfrac{3}{e}$. Για λ=1 έχουμε: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$, οπότε

$f(0)=\dfrac{\sqrt{0+1}-2}{0^2-9}=\dfrac{1}{9}$, επομένως $g(e)=\dfrac{27\cdot\frac{1}{9}}{e}=\dfrac{3}{e}$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to e}g(x)=g(e)$ και η g είναι συνεχής στο $x_0=e$

β Για $x\in(0,\ e)\cup(e,+\infty)$:

$g(x)=\dfrac{3\ln^2x-3\ln x}{x\ln x-x}=\dfrac{3\ln x(\ln x-1)}{x(\ln x-1)}=\dfrac{3\ln x}{x}$ και η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\left(\dfrac{3\ln x}{x}\right)'=$

$\dfrac{(3\ln x)'x-3\ln x(x)'}{x^2}=\dfrac{3\frac{1}{x}x-3\ln x}{x^2}=\dfrac{3-3\ln x}{x^2}$

Συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής της g ως προς x, όταν x=1 είναι $g'(1)=\dfrac{3-3\ln1}{1^2}=3$

γ Έχουμε:

$g(1)=\dfrac{3\ln1}{1}=0$, άρα το σημείο επαφής είναι $A(1,\ 0)$. Στο σημείο $A(1,\ 0)$ η εξίσωση εφαπτομένης

στην καμπύλη της g είναι: $(\varepsilon):y=\kappa x+\beta$ με $\kappa=g'(1)=3$, οπότε $(\varepsilon):y=3x+\beta$

Όμως $A(1,\ 0)\in(\varepsilon)$, άρα $0=3\cdot1+\beta\Leftrightarrow\beta=-3$. Επομένως $(\varepsilon):y=3x-3$

δ Για $x\in(0,\ e)\cup(e,+\infty)$ έχουμε:

$g(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{3\ln x}{x}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}3\ln x>0\Leftrightarrow\ln x>0\Leftrightarrow\ln x>\ln1\Leftrightarrow x>1$. Για $x=e$ έχουμε $g(e)=\dfrac{3}{e}>0$,

επομένως η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από το άξονα x΄x, όταν $x\in(1,\ +\infty)$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΕΜΜΥ ΝΕΤΕΡ (1882-1935)

Διεθνούς φήμης Γερμανίδα μαθηματικός που διακρίθηκε για τη σημαντικότατη συμβολή της στη δημιουργία «αφηρημένης άλγεβρας» και για τα επιτεύγματά της στη θεωρητική φυσική. Κόρη του επίσης μαθηματικού Μαξ Νέτερ, σπούδασε μαθηματικά στα Πανεπιστήμια της Ερλάνγκεν και Γκέτινγκεν, μόνο ως ακροάτρια, καθώς οι κανόνες της εποχής δεν της επέτρεπαν να είναι κανονική σπουδάστρια.

Οι εξαιρετικές της επιδόσεις όμως είχαν ως αποτέλεσμα να παρουσιαστούν κάποια ρήγματα στα απαγορευτικά γι' αυτήν τείχη. Έτσι, το 1907, πήρε το διδακτορικό της και κατόπιν δίδαξε ως καθηγήτρια σε διάφορα Πανεπιστήμια της Γερμανίας και των ΗΠΑ. Οι βασικές της εργασίες στα μαθηματικά αναφέρονται στη θεωρία των προτύπων («νετεριανό πρότυπο»), στις παραστάσεις αλγεβρών, στους δακτυλίους («δακτύλιος της Νέτερ»), στη θεωρία των ιδεωδών, στη θεωρία των κλάσεων στα αριθμητικά σώματα και, γενικότερα, στην αριθμητική θεωρία των αλγεβρικών συναρτήσεων.

Μεγάλη επίσης υπήρξε η συνεισφορά της στη θεωρητική φυσική. Το 1918 έφθασε στο «θεμελιώδες θεώρημά» της που συνδέει τις ιδιότητες συμμετρίας ενός φυσικού συστήματος με τις «αρχές διατήρησης».

Στις εξαιρετικά σημαντικές εργασίες της συγκαταλέγονται οι μελέτες της : «Πρότυπα σε περιοχές όχι αντιμεταθετικές» (1920), «Υπερμιγαδικά μεγέθη και θεωρία των παραστάσεων» (1929), κ.α.