ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΔΙΟΛΙΤΣΗΣ
ΑΘΑΝΑΣΙΑ ΠΑΠΑΣΤΑΜΑΤΗ
ΝΙΚΟΛΕΤΤΑ ΜΠΑΚΟΥ

"Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x)<0$ ή $f'(x)>0$ για κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ και $f(x_0)=0$, για $x_0\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα ή γνησίως αύξουσα αντιστοίχως στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν: $f(x)>0$ για $x<x_0$ και $f(x)<0$ για $x>x_0$ ή $f(x)<0$ για $x<x_0$ και $f(x)>0$ για $x>x_0$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Θέμα 1°

Α. Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες:

ορίζεται η $g(f(x))$, η ευθεία $\varepsilon: y=2x-5$ εφάπτεται στη καμπύλη της f στο σημείο με $x_0=2$, $g'(-1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Να βρείτε:

i) Τη γωνία φ που σχηματίζει με τον άξονα x΄x η εφαπτομένη στη καμπύλη της $g(f(x))$ στο A(2,g(f(2)))

ii) Τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης $h(x)=f^2(x^2-2)-g(2x-5)$ ως προς x, όταν $x=2$

Β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=\frac{e^{-x}}{2-x}$, $x<2$

Γ. Βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού $\lambda\neq 0$ για τις οποίες η $g(x)=(x^2+16)e^{\lambda x+1}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση

Α. i) Η ευθεία ε: $y=2x-5$ εφάπτεται στη καμπύλη της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$, τότε:

$f(2)=2\cdot 2-5\Leftrightarrow f(2)=-1$ και $f'(2)=2$. Η συνάρτηση $\varphi(x)=g(f(x))$ είναι παραγωγίσιμη με

$\varphi'(x)=(g(f(x)))'=g'(f(x))\cdot f'(x)$, (1). Για τη ζητούμενη γωνία φ ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\varphi=\varphi'(2)\overset{(1)}{\underset{x=2}{\Leftrightarrow}}$

$\varepsilon\varphi\varphi=g'(f(2))\cdot f'(2)\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi=g'(-1)\cdot 2\overset{\text{υποθ.}}{\Leftrightarrow}\varepsilon\varphi\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi=\sqrt{3}$, επομένως $\varphi=\frac{\pi}{3}$

ii) Η συνάρτηση h(x) είναι παραγωγίσιμη (σύνθεση) με:

$h'(x)=\left[f^2(x^2-2)\right]'-\left[g(2x-5)\right]'\Leftrightarrow h'(x)=2f(x^2-2)f'(x^2-2)(x^2-2)'-g'(2x-5)(2x-5)'\Leftrightarrow$

$h'(x)=4xf(x^2-2)f'(x^2-2)-2g'(2x-5)$. Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι:

$h'(2)=4\cdot 2\cdot f(2^2-2)f'(2^2-2)-2\cdot g'(2\cdot 2-5)\Leftrightarrow h'(2)=8\cdot f(2)f'(2)-2\cdot g'(-1)\overset{i)}{\Leftrightarrow}$

$h'(2)=8\cdot(-1)\cdot 2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow h'(2)=-16-\sqrt{3}$

Β. Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x<2$ με:

$$f'(x)=\frac{(e^{-x})'(2-x)-e^{-x}(2-x)'}{(2-x)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-e^{-x}(2-x)+e^{-x}}{(x-2)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{(x-1)e^{-x}}{(x-2)^2}$$

Για $x<2$ είναι: $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{(x-1)e^{-x}}{(x-2)^2}=0\overset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow}x-1=0\Leftrightarrow x=1\in(-\infty,2)$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{(x-1)e^{-x}}{(x-2)^2}>0\overset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow}$

$x-1>0\Leftrightarrow x>1$, άρα $x\in(1,2)$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα

στο $(-\infty,1]$. Παρουσιάζει επομένως (ολικό) ελάχιστο στο $x_0=1$, το $f(1)=\frac{e^{-1}}{2-1}=\frac{1}{e}$

Γ. Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$g'(x)=e^{\lambda x+1}(x^2+16)'+(x^2+16)(e^{\lambda x+1})'(\lambda x+1)'\Leftrightarrow g'(x)=2xe^{\lambda x+1}+\lambda(x^2+16)e^{\lambda x+1}\Leftrightarrow$

$g'(x)=(\lambda x^2+2x+16\lambda)e^{\lambda x+1}$, $x\in\mathbb{R}$. Το πρόσημο της $g'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης:

$\lambda x^2+2x+16\lambda$ η οποία είναι τριώνυμο ως προς x (αφού $\lambda\neq 0$). Επομένως:

Όταν $\lambda x^2+2x+16\lambda>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η g είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $\lambda x^2+2x+16\lambda>0$, όταν $\lambda>0$ και $\Delta<0$. Άρα πρέπει:

$$\begin{cases}\lambda>0\\ \text{και}\\ 4-64\lambda^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda>0\\ \text{και}\\ \lambda^2>\frac{1}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda>0\\ \text{και}\\ \lambda<-\frac{1}{4}\text{ ή }\lambda>\frac{1}{4}\end{cases}.\text{ Συνεπώς }\lambda>\frac{1}{4}$$

Για $\lambda=\frac{1}{4}$ είναι $g'(x)=e^{\frac{x}{4}+1}\left(\frac{1}{4}x^2+2x+4\right)\Leftrightarrow g'(x)=e^{\frac{x}{4}+1}\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2$, οπότε $g'(x)\geq 0$ με την ισότητα να

ισχύει μόνο για $x=-4$. Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όταν $\lambda\geq\frac{1}{4}$

Θέμα 2^o

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln^2 x-(1+e)\ln x+e,\ x>0$

α. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x)=0$

β. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε για ποιες τιμές του $x>0$ παρουσιάζει ακρότατα.

γ. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της $f'(x)$ ως προς x, όταν $x=1$

δ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(1+h)-e}{h}$

Λύση

α. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln^2 x-(1+e)\ln x+e=0,\ (1)$

Η (1) είναι τριώνυμο ως προς lnx με διακρίνουσα $\Delta=(1+e)^2-4e=e^2+2e+1-4e=e^2-2e+1=(e-1)^2$

και ρίζες: $\dfrac{1+e\pm\sqrt{(e-1)^2}}{2}=\dfrac{1+e\pm(e-1)}{2}$, οπότε $\ln x=e \Leftrightarrow x=e^e$ ή $\ln x=1 \Leftrightarrow x=e$

β. Είναι $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln^2 x-(1+e)\ln x+e>0$, που ισχύει όταν $\ln x<1$ ή $\ln x>e$, οπότε $x<e$ ή $x>e^e$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$, γνησίως φθίνουσα στο $[e,e^e]$ και γνησίως αύξουσα στο $[e^e,+\infty)$

Επομένως παρουσιάζει μέγιστο για $x_1=e$ και ελάχιστο για $x_2=e^e$

γ. Η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ (σύνθεση) με:

$$f''(x)=(f'(x))'=\left[\ln^2 x-(1+e)\ln x+e\right]'=(\ln^2 x)'-(1+e)(\ln x)'=\frac{2\ln x}{x}-\frac{1+e}{x}$$

Ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι $f''(1)=\dfrac{2\ln 1}{1}-\dfrac{1+e}{1}=-1-e$

δ. Είναι $f'(1)=e$, άρα $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(1+h)-e}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(1+h)-f'(1)}{h}=f''(1)\overset{\gamma}{=}-1-e$

Θέμα 3^o

Α. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $e^{f(x)}+2f^3(x)=x^{2011}+2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$

Β. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει: $f^5(x)+5f^3(x)+5f(x)=x^5+15x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο των τιμών της $f(x)$

Λύση

Α. Ισχύει $e^{f(x)}+2f^3(x)=x^{2011}+2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f παραγωγίσιμη, οπότε παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε:

$e^{f(x)}f'(x)+6f'(x)f^2(x)=2011x^{2010}+2$, άρα $\left(e^{f(x)}+6f^2(x)\right)f'(x)=2011x^{2010}+2,\ (1)$

Είναι $e^{f(x)}+6f^2(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $2011x^{2010}+2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε από τη σχέση (1)

προκύπτει ότι $f'(x)=\dfrac{2011x^{2010}+2}{e^{f(x)}+6f^2(x)}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, δηλαδή δεν παρουσιάζει ακρότατα σ' αυτό.

Β. Αν στην σχέση $f^5(x)+5f^3(x)+5f(x)=x^5+15x$, θέσουμε $x=0$ προκύπτει $f^5(0)+5f^3(0)+5f(0)=0$, που ισοδύναμα γίνεται $\left(f^4(0)+5f^2(0)+5\right)f(0)=0$. Όμως $f^4(0)+5f^2(0)+5>0$ και επομένως $f(0)=0$

Ακόμη: η σχέση $f^5(x)+5f^3(x)+5f(x)=x^5+15x$ αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις, άρα παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε $\left(f^5(x)+5f^3(x)+5f(x)\right)'=\left(x^5+15x\right)' \Leftrightarrow$

$$5f^4(x)f'(x)+15f^2(x)f'(x)+5f'(x)=5x^4+15 \Leftrightarrow f'(x)\left(f^4(x)+3f^2(x)+1\right)=x^4+3 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^4+3}{f^4(x)+3f^2(x)+1}>0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $x^4+3>0$ και $f^4(x)+3f^2(x)+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι για $x>0$ είναι $f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$ και για $x<0$ είναι $f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΝΙΚΟΛΟ ΦΟΝΤΑΝΑ - ΤΑΡΤΑΛΙΑ (1499-1557)

Ιταλός αυτοδίδακτος μαθηματικός από φτωχή οικογένεια της Μπρέσια. Εργάστηκε σαν καθηγητής Μαθηματικών στη Βενετία, όπου και πέθανε. Το όνομά του συνδέθηκε κυρίως με την επινόηση μεθόδων λύσης κυβικών εξισώσεων στις οποίες οδηγήθηκε σε συνεργασία με τον συμπατριώτη του Τζιρόλαμο Καρντάνο, τον οποίο, πάντως, κατηγόρησε για βιαστική κοινοποίηση και ιδιοποίηση της κοινής τους μελέτης. Η αλήθεια είναι ότι ο Καρντάνο όντως δημοσιοποίησε τη μελέτη χωρίς την άδεια του Φοντάνα, αλλά αποκάλυψε ότι τις ίδιες μεθόδους λύσης των περιωνυμικών εξισώσεων είχε πετύχει πενήντα χρόνια νωρίτερα ένας άλλος συμπατριώτης τους, ο Σκιπιόνε Ντελ Φέρο. Ο Φοντάνα ασχολήθηκε κυρίως με τη μελέτη μαθηματικών προβλημάτων της στρατιωτικής βιομηχανίας. Μέσα από το έργο του «Νέα επιστήμη» απέδειξε ότι η τροχιά που διανύει ένα βλήμα δεν είναι ευθεία αλλά καμπύλη και ότι εκσφενδονίζεται σε μεγαλύτερη απόσταση όταν η γωνία του με το έδαφος είναι 45 μοίρες. Αλλα σημαντικά έργα του ήταν η «Γενική πραγματεία περί αριθμών και μέτρων» και οι πρώτες στην Ιταλία ολοκληρωμένες μεταφράσεις των θεωρημάτων του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη. Το «Ταρτάλια» ήταν παρατσούκλι που του είχαν βγάλει επειδή τραύλιζε και το οποίο ενσωμάτωσε ο ίδιος στο όνομά του σε μια επίδειξη υπερβατικού αυτοσαρκασμού.