ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΒΑΜΒΑΚΑΡΗΣ

- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, τότε η συνάρτηση $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$
- Έστω $K(x(t),y(t))$ σημείο καμπύλης C του επιπέδου με εξίσωση: $\alpha x^2(t)+\beta y^2(t)=\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma>0$ Τότε: $\alpha x(t)x'(t)+\beta y(t)y'(t)=0$, όπου $x'(t)$, $y'(t)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης και τεταγμένης αντιστοίχως του K

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Θέμα 1°

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0=-6$ και συνάρτηση h με $h(x)=\begin{cases} f(3x-3), & x<-1 \\ f(x^3-5), & x\ge -1\end{cases}$

A.i) Να δείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο $x=-1$

ii) Αν $f(-6)=f'(-6)=3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας ε στη C_h στο σημείο $K(-1,h(-1))$

B. Σημείο $M(x,y)$ κινείται στην ευθεία ε του ερωτήματος Aii και πλησιάζει τον άξονα y΄y με ρυθμό $\frac{3}{2}\,cm/s$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $s=(MN)$ με $N(4,0)$, τη χρονική στιγμή κατά την οποία το M διέρχεται από το σημείο με τετμημένη $x_1=0$

Λύση

A.i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-6$, άρα $\lim\limits_{x\to -6^-}\frac{f(x)-f(-6)}{x+6}=\lim\limits_{x\to -6^+}\frac{f(x)-f(-6)}{x+6}=f'(-6)$, (1)

• Για $x>-1$ κοντά στο -1, είναι: $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{f(x^3-5)-f(-6)}{x+1}$,

με $h(-1)=f\left((-1)^3-5\right)=f(-6)$. Θέτουμε $x^3-5=u$, οπότε $x\to -1^+$, άρα $u\to -6^+$ και $x^3=u+5$, άρα $x=-\sqrt[3]{-(u+5)}$. Επομένως:

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim_{u\to -6^+}\frac{f(u)-f(-6)}{1-\sqrt[3]{-(u+5)}}=\lim_{u\to -6^+}\frac{(f(u)-f(-6))\left[1+\sqrt[3]{-(u+5)}+\left(\sqrt[3]{-(u+5)}\right)^2\right]}{\left(1-\sqrt[3]{-(u+5)}\right)\left[1+\sqrt[3]{-(u+5)}+\left(\sqrt[3]{-(u+5)}\right)^2\right]}=$$

$$=\lim_{u\to -6^+}\frac{f(u)-f(-6)}{1-\left(\sqrt[3]{-(u+5)}\right)^3}\left[1+\sqrt[3]{-(u+5)}+\left(\sqrt[3]{-(u+5)}\right)^2\right]=\lim_{u\to -6^+}\left(\frac{f(u)-f(-6)}{u+6}\right)\lim_{u\to -6^+}\left[1+\sqrt[3]{-(u+5)}+\left(\sqrt[3]{-(u+5)}\right)^2\right]=$$

$$=f'(-6)(1+1+1)=3f'(-6)\ (\text{λόγω της (1)})$$

• Για $x<-1$ κοντά στο -1, είναι: $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{f(3x-3)-f(-6)}{x+1}$, με $h(-1)=f(-6)$

Θέτουμε $3x-3=t$, οπότε $x\to -1^-$, άρα $t\to -6^-$ και $x=\frac{t+3}{3}$. Συνεπώς:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim_{t\to -6^-}\frac{3(f(t)-f(-6))}{t+6}=3\lim_{t\to -6^-}\frac{f(t)-f(-6)}{t+6}=3f'(-6)\ (\text{λόγω της (1)})$$

Οπότε η h είναι παραγωγίσιμη στο $x=-1$ με $h'(-1)=f'(-6)$

ii) Είναι $(\varepsilon): y-h(-1)=h'(-1)(x+1)$ με $h(-1)=f(-6)=3$ (από υπόθεση) και $h'(-1)=3f'(-6)=9$ (από Ai και υπόθεση), οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας ε της C_h στο K είναι (ε): $y-3=9(x+1)\Leftrightarrow y=9x+12$

B. Ισχύει: $s=(MN)=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$ οπότε, για $x=x(t)$, $y=y(t)$ έχουμε $s(t)=\sqrt{(x(t)-4)^2+y^2(t)}$

Παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς t, παίρνουμε $s'(t)=\frac{(x(t)-4)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{(x(t)-4)^2+y^2(t)}}$, (2)

Είναι $x'(t)=\frac{3}{2}\,cm/s$ και $y'(t)=9x'(t)$, αφού το M κινείται στην $(\varepsilon): y=9x+12$ (από Aii)

Για $t=t_0$, έχουμε:

$x(t_0)=x_1=0$ και $y(t_0)=9\cdot 0+12=12$, έτσι η (2) για $t=t_0$, γίνεται: $s'(t_0)=\frac{(x(t_0)-4)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{(x(t_0)-4)^2+y^2(t_0)}}=$

$$\frac{(0-4)\frac{3}{2}+12\cdot 9\cdot\frac{3}{2}}{\sqrt{(0-4)^2+(12)^2}}=\frac{-6+162}{\sqrt{16+144}}=\frac{156}{\sqrt{160}}=\frac{156}{4\sqrt{10}}=\frac{39}{\sqrt{10}}=\frac{39\sqrt{10}}{10}\,cm/s$$

Θέμα 2ο

Έστω συνάρτηση $f:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία:

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)+xy-x,\ \text{ για κάθε } x,y\in(0,\ +\infty) \text{ και } f'(1)=4$$

Α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$

Β. Αν η συνάρτηση $\varphi:(0,\ +\infty)\to\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\varphi\left(x^2+2x+3\right)=f(2x-1)+4x$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε, στη C_φ στο σημείο $\Sigma(6,\ \varphi(6))$

Γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης σημείου $\Lambda\in\varepsilon$, αν η τεταγμένη του ελαττώνεται με ρυθμό $\frac{3}{2}\,{cm}/{s}$

Λύση

Α. Στη σχέση $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)+xy-x$ θέτουμε $x=y=1$ και έχουμε: $f(1)=f(1)-f(1)+1-1$, άρα $f(1)=0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, με $f'(1)=4$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4\overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=4,\ (1)$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\alpha\in(0,\ +\infty)$ με $\alpha\neq1$, ισχύει:

$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim\limits_{h\to1}\frac{f\left(\frac{\alpha}{h}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha}{h}-\alpha}\in\mathbb{R},\ (2)$, όπως προκύπτει αν θέσουμε $x=\frac{\alpha}{h}$, οπότε $x\to\alpha$, άρα $h\to1$

Έτσι, η f θα είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$

Στη σχέση $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)+xy-x$ θέτουμε όπου $x=\alpha,\ y=h$ και έχουμε:

$f\left(\frac{\alpha}{h}\right)=f(\alpha)-f(h)+\alpha h-\alpha,\ (3)$. Συνεπώς η σχέση (2), λόγω της σχέσης (3), γράφεται

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{h\to1}\frac{f(\alpha)-f(h)+\alpha h-\alpha-f(\alpha)}{\alpha\left(\frac{1}{h}-1\right)}=\lim_{h\to1}\frac{-f(h)+\alpha h-\alpha}{\alpha(1-h)}\cdot h=$$

$$\frac{1}{\alpha}\lim_{h\to1}\frac{f(h)-\alpha h+\alpha}{h-1}\cdot h=\frac{1}{\alpha}\lim_{h\to1}\frac{f(h)-\alpha(h-1)}{h-1}\cdot h=\frac{1}{\alpha}\lim_{h\to1}\left[\frac{f(h)}{h-1}-\frac{\alpha(h-1)}{h-1}\right]\cdot h=\frac{1}{\alpha}\lim_{h\to1}\left[\frac{f(h)}{h-1}-\alpha\right]\cdot h\overset{(1)}{=}$$

$\frac{1}{\alpha}(4-\alpha)=\left(\frac{4}{\alpha}-1\right)\in\mathbb{R},\ \left(\lim\limits_{h\to1}h=1\right)$. Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ +\infty)$, με $f'(x)=\frac{4}{x}-1,\ x>0$

Β. Στην ισότητα $\varphi\left(x^2+2x+3\right)=f(2x-1)+4x$, θέτουμε $x=1$ και έχουμε $\varphi(6)=f(1)+4=0+4=4$

Ακόμη, οι συναρτήσεις f, φ είναι παραγωγίσιμες στο $(0,\ +\infty)$, επομένως η ισότητα:

$\varphi\left(x^2+2x+3\right)=f(2x-1)+4x$ αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις αφού, οι συναρτήσεις $\varphi\left(x^2+2x+3\right)$, $f(2x-1)$ είναι συνθέσεις παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Παραγωγίζοντας τα μέλη της $\varphi\left(x^2+2x+3\right)=f(2x-1)+4x$, έχουμε:

$$\left[\varphi\left(x^2+2x+3\right)\right]'=\left[f(2x-1)+4x\right]'\Leftrightarrow\varphi'\left(x^2+2x+3\right)\left(x^2+2x+3\right)'=f'(2x-1)(2x-1)'+(4x)'\Leftrightarrow$$

$\varphi'\left(x^2+2x+3\right)(2x+2)=f'(2x-1)\cdot2+4,\ (4)$. Για $x=1$, η (4) δίνει: $\varphi'(6)\cdot4=f'(1)\cdot2+4\overset{f'(1)=4}{\Leftrightarrow}\varphi'(6)=3$

Η εξίσωση εφαπτομένης στη C_φ στο σημείο $\Sigma(6,\ \varphi(6))$, είναι: $(\varepsilon):y-\varphi(6)=\varphi'(6)(x-6)$, που γίνεται (αφού: $\varphi(6)=4$, $\varphi'(6)=3$), $(\varepsilon):y-4=3(x-6)$, άρα $(\varepsilon):y=3x-14$

Γ. Αν $x=x(t)$ (τετμημένη του Λ) και $y=y(t)$ (τεταγμένη του Λ), τότε: $y(t)=3x(t)-14$ και $y'(t)=-\frac{3}{2}$

οπότε, $y'(t)=3x'(t)\Leftrightarrow x'(t)=\frac{1}{3}y'(t)\Leftrightarrow x'(t)=\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}\,{cm}/{s}$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΑΛΦΡΕΝΤ ΝΟΡΘ ΟΥΑΪΤΧΑΙΝΤ (1861-1947)

Σπουδαίος Άγγλος μαθηματικός και φιλόσοφος. Το ενδιαφέρον του επικεντρώθηκε κυρίως στα Καθαρά Μαθηματικά, στη Συμβολική Λογική και στη Νεότερη Άλγεβρα. Υπήρξε φίλος και συνεργάτης του Μπέρτραντ Ράσελ και καρπός αυτής της δεκάχρονης συνεργασίας ήταν το μνημειώδες τρίτομο έργο «Μαθηματικές Αρχές», που αποτέλεσε σταθμό για τις λογικές έρευνες του 20ού αιώνα. Είχε προηγηθεί το αποκλειστικά δικό του έργο «Πραγματεία για την παγκόσμια Άλγεβρα». Ο Ουαϊτχάιντ δίδαξε Μαθηματικά στα πανεπιστήμια του Κέμπριτζ και του Λονδίνου, η ενασχόλησή του, όμως, με τη φιλοσοφική θεμελίωση της Φυσικής και με τη Φιλοσοφία της Επιστήμης τον έφερε στην έδρα Φιλοσοφίας του Χάρβαρντ των ΗΠΑ να διδάσκει μέχρι τα γεράματά του. Έμεινε στην ιστορία των στοχαστών ως ο θεμελιωτής της «θεωρίας του οργανισμού» για την εξήγηση της φύσης.