ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΔΙΟΛΙΤΣΗΣ

Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] τότε, το εμβαδόν Ε του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες: $x=\alpha$, $x=\beta$, είναι

$$E=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$$

Ολοκλήρωμα

Θέμα 1°

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε να ισχύει: $2f(2x-3)+f(6-x)=2x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\int_{6-x}^{2x-3} f(t)dt=x^2-x-6$

β Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_4^7 f(x)dx$

γ Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x)=\int_{2-\frac{1}{5}x}^{\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}} f(5u-4)du$

δ Να δείξετε ότι η εξίσωση: $3f(x)-10=0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Λύση

α Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα αν $x_0\in\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση σ με τύπο: $\sigma(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αρχική της f. Είναι $\int_{6-x}^{2x-3} f(t)dt=$ $\int_{x_0}^{2x-3} f(t)dt-\int_{x_0}^{6-x} f(t)dt=\sigma(2x-3)-\sigma(6-x)$, όπου οι συναρτήσεις $\sigma(2x-3)$, $\sigma(6-x)$ είναι παραγωγίσιμες ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι $\sigma'(x)=f(x)$, (1), άρα $(\sigma(2x-3)-\sigma(6-x))'=$

$2\sigma'(2x-3)+\sigma'(6-x)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\left(\int_{x_0}^{2x-3} f(t)dt-\int_{x_0}^{6-x} f(t)dt\right)'=2f(2x-3)+f(6-x)$, (2)

Η σχέση $\int_{6-x}^{2x-3} f(t)dt=x^2-x-6$ γράφεται ισοδύναμα: $\int_{x_0}^{2x-3} f(t)dt-\int_{x_0}^{6-x} f(t)dt-x^2+x+6=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(x)=\int_{x_0}^{2x-3} f(t)dt-\int_{x_0}^{6-x} f(t)dt-x^2+x+6$, $x\in\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Είναι $h'(x)=\left(\int_{x_0}^{2x-3} f(t)dt-\int_{x_0}^{6-x} f(t)dt\right)'-2x+1\overset{(2)}{\Leftrightarrow}h'(x)=2f(2x-3)+f(6-x)-2x+1$, που λόγω της σχέσης της υπόθεσης γίνεται: $h'(x)=2x-1-2x+1$, άρα $h'(x)=0$, δηλαδή η h είναι σταθερή.

Συνεπώς $h(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$, όπου $h(3)=\int_{x_0}^{3} f(t)dt-\int_{x_0}^{3} f(t)dt-9+3+6=0$, οπότε $c=0$ και επομένως

$h(x)=0\Leftrightarrow\int_{x_0}^{2x-3} f(t)dt-\int_{x_0}^{6-x} f(t)dt-x^2+x+6=0\Leftrightarrow\int_{6-x}^{2x-3} f(t)dt=x^2-x-6,\ x\in\mathbb{R}$

β Στη σχέση:

$\int_{6-x}^{2x-3} f(t)dt=x^2-x-6$, θέτουμε διαδοχικά $x=2$, $x=5$ και παίρνουμε $\int_4^1 f(x)dx=-4$ και $\int_1^7 f(x)dx=14$

Είναι $\int_4^7 f(x)dx=\int_1^7 f(x)dx-\int_1^4 f(x)dx=14-4=10$

γ Για το ολοκλήρωμα:

$g(x)=\int_{2-\frac{1}{5}x}^{\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}} f(5u-4)du$, θέτουμε $5u-4=v$, οπότε $du=\frac{1}{5}dv$ και: για $u=\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}$ έχουμε

$v=5\left(\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}\right)-4=2x-3$, ενώ για $u=2-\frac{1}{5}x$ έχουμε $v=5\left(2-\frac{1}{5}x\right)-4=6-x$

Συνεπώς, $g(x)=\frac{1}{5}\int_{6-x}^{2x-3} f(v)dv\overset{\alpha}{=}\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{5}x-\frac{6}{5}$, $x\in\mathbb{R}$. Έτσι $g'(x)=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$, όπου $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x-1=0$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ και $g'(x)>0\Leftrightarrow 2x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$. Δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=\frac{1}{2}$, το $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}$

δ Θεωρούμε την συνάρτηση:

$F(x)=\int_4^x f(\omega)d\omega$, $x\in\mathbb{R}$ που ως αρχική της f στο $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σ΄ αυτό, με $F'(x)=f(x)$

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την F στο διάστημα $[4,7]\subset\mathbb{R}$. Οπότε, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(4,7)\subset\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε: $F'(\rho)=\frac{F(7)-F(4)}{7-4}\Leftrightarrow f(\rho)=\frac{1}{3}\left(\int_4^7 f(x)dx-\int_4^4 f(x)dx\right)\Leftrightarrow$

$f(\rho)=\frac{1}{3}\int_4^7 f(x)dx$. Όμως από **β** ερώτημα: $\int_4^7 f(x)dx=10$, άρα $f(\rho)=\frac{10}{3}\Leftrightarrow f(\rho)-\frac{10}{3}=0\Leftrightarrow 3f(\rho)-10=0$

και επομένως η εξίσωση $3f(x)-10=0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Θέμα 2ο

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, συνεχής και τέτοια ώστε $f(x)=\int_x^3 \frac{2}{e^{f(t)}+2}dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημο αυτής.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ καθώς και ότι ισχύει: $1+\int_3^x \frac{1}{e^{f(t)}+2}dt>\frac{1}{3}x$, για κάθε $x\neq 3$

iii) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε την f^{-1}. Να βρείτε τη τιμή $f^{-1}(1)$

iv) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που ορίζεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες: $x=\frac{5-e}{2}$, $x=3$

Λύση

i) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και η $h(x)=\frac{2}{e^{f(x)}+2}$ είναι συνεχής σε αυτό (σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

Έχουμε $f(x)=\int_x^3 \frac{2}{e^{f(t)}+2}dt=-\int_3^x \frac{2}{e^{f(t)}+2}dt$, όπου η $\int_3^x \frac{2}{e^{f(t)}+2}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αρχική της h, άρα και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-\frac{2}{e^{f(x)}+2}<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(3)=\int_3^3 \frac{2}{e^{f(t)}+2}dt=0$, άρα για κάθε $x<3$ έχουμε $f(x)>0$, ενώ για κάθε $x>3$ έχουμε $f(x)<0$

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$(f'(x))'=\left(-\frac{2}{e^{f(x)}+2}\right)'\Leftrightarrow f''(x)=\frac{2e^{f(x)}f'(x)}{\left(e^{f(x)}+2\right)^2}$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως: $\frac{2e^{f(x)}f'(x)}{\left(e^{f(x)}+2\right)^2}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, συνεπώς η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$. Είναι $f(3)=0$, $f'(3)=-\frac{2}{e^{f(3)}+2}=-\frac{2}{e^0+2}=-\frac{2}{3}$ και η εφαπτομένη ε στην C_f στο σημείο της $(3,f(3))$ έχει εξίσωση: $y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+2$. Επειδή η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, η εφαπτομένη βρίσκεται πάνω από την C_f σε κάθε σημείο της με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{3\}$, ισχύει $f(x)<-\frac{2}{3}x+2\Leftrightarrow-\int_3^x \frac{2}{e^{f(t)}+2}dt<-\frac{2}{3}x+2\Leftrightarrow 1+\int_3^x \frac{1}{e^{f(t)}+2}dt>\frac{1}{3}x$

iii) Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, είναι και «1 – 1», συνεπώς αντιστρέφεται.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $f'(x)=-\frac{2}{e^{f(x)}+2}\Leftrightarrow f'(x)\left(e^{f(x)}+2\right)=-2\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}+2f'(x)+2=0\Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}+2f(x)+2x\right)'=0$, (1). Η συνάρτηση $e^{f(x)}+2f(x)+2x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως πράξη συνεχών) και επομένως από (1): $e^{f(x)}+2f(x)+2x=c$, (2) με $c\in\mathbb{R}$. Όμως $f(3)=0$, οπότε η (2) για $x=3$ δίνει $c=7$, άρα $e^{f(x)}+2f(x)+2x=7$, $x\in\mathbb{R}$. Στην τελευταία θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και έχουμε $e^y+2y-7=-2x$, οπότε $x=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}e^y-y$, $y\in\mathbb{R}$. Έτσι $f^{-1}(y)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}e^y-y$, $y\in\mathbb{R}$, άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης της f είναι: $f^{-1}(x)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}e^x-x$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $f^{-1}(1)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}e-1=\frac{5-e}{2}$

iv) Από ερώτημα i) έχουμε $f(3)=0$ και $f(x)>0$, για κάθε $x<3$, οπότε για το ζητούμενο εμβαδόν Ε ισχύει $E=\int_{\frac{5-e}{2}}^3 f(x)\,dx$. Είναι $f(3)=0\Leftrightarrow f^{-1}(0)=3$ και $f^{-1}(1)=\frac{5-e}{2}$, συνεπώς για το ολοκλήρωμα, $\int_{\frac{5-e}{2}}^3 f(x)\,dx$ θέτουμε $x=f^{-1}(t)$ και έχουμε $dx=\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}e^t-t\right)'dt\Leftrightarrow dx=\left(-\frac{1}{2}e^t-1\right)dt$ και $x=\frac{5-e}{2}\Leftrightarrow f^{-1}(t)=f^{-1}(1)\Leftrightarrow$ $t=1$, $x=3\Leftrightarrow f^{-1}(t)=3\Leftrightarrow f^{-1}(t)=f^{-1}(0)\Leftrightarrow t=0$. Οπότε ($f^{-1}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$): $E=\int_{\frac{5-e}{2}}^3 f(x)\,dx=$

$\int_1^0 f\left(f^{-1}(t)\right)\left(-\frac{1}{2}e^t-1\right)dt=\int_1^0 t\left(-\frac{1}{2}e^t-1\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^1 te^t dt+\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 t\left(e^t\right)'dt+\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}\left[te^t\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt+$ $\frac{1}{2}\left[t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}(e-1)+\frac{1}{2}=1$ τ.μ.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

Καρλ Φρίντριχ Γκάους (1777-1855)

Γερμανός μαθηματικός και αστροφυσικός, από τις κορυφαίες επιστημονικές φυσιογνωμίες όλων των εποχών, αφού θεωρείται ο θεμελιωτής των μαθηματικών της σύγχρονης εποχής. Αν και γιος κηπουρού από τα κολεγιακά του χρόνια είχε κιόλας αφομοιώσει τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς και τα κλασικά έργα των Νιούτον, Όιλερ και Λαγκράνζ. Αστειευόμενος έλεγε «πρώτα έμαθα να υπολογίζω και μετά να μιλάω». Στο πρώτο μεγάλο και μνημειώδες επιστημονικό του έργο με τίτλο «Αριθμητικές έρευνες» (1801) ο Γκάους περιλαμβάνει και το λεγόμενο «χρυσό θεώρημα», που σήμερα ονομάζεται νόμος της τετραγωνικής αντιστροφής. Ολόκληρο, πάντως, το έργο θεωρείται η ληξιαρχική πράξη γέννησης της σύγχρονης αριθμοθεωρίας. Σε όλα τα γνωστά θεωρήματα της εποχής κατάφερε να δώσει και τη «γεωμετρική τους κατεύθυνση». Όταν λίγο αργότερα ο Γκάους ασχολήθηκε με τους υπολογισμούς των αστεροειδών, τότε θεμελίωσε και την καθοριστική για τις μετέπειτα διαστημικές ανακαλύψεις πιθανοθεωρία και το νόμο της κανονικής κατανομής (γνωστή ως «κατανομή Γκάους»). Η φήμη του τον κατέστησε περιζήτητο καθηγητή στα καλύτερα πανεπιστήμια της Ευρώπης αλλά εκείνος δεν σταμάτησε να ερευνά. Νέο του επίτευγμα η θεμελίωση της διαφορικής γεωμετρίας και το «έξοχο» όπως ονομάστηκε θεώρημά του για την καμπυλότητα των επιφανειών. Η «συμφυής γεωμετρία», που επινόησε, άνοιξε τον δρόμο στη γεωμετρία Ρίμαν και την τανυστική ανάλυση, που με τη σειρά της πρόσφερε το μαθηματικό υπόβαθρο στη θεωρία Αϊνστάιν.