

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
& ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

---

**ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 18 /05 /2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ  
ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**ΘΕΜΑ Α**

A<sub>1</sub>. Σχολικό βιβλίο σελ. 262 - 263

A<sub>2</sub>. Σχολικό βιβλίο σελ. 141

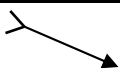

A<sub>3</sub>. Σχολικό βιβλίο σελ. 246

A<sub>4</sub>. i) Λ    ii) Σ    iii) Λ    iv) Σ    v) Σ

**ΘΕΜΑ Β**

B<sub>1</sub>. Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x^2+1) - x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	⊖	+
f			

Τ.Ε

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$  και παρουσιάζει στο  $x_0 = 0$  τοπικό ελάχιστο το  $f(0) = 0$

**B<sub>2</sub>.** Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο  $\mathbb{R}$ .

$$f''(x) = \frac{(2x)'(x^2+1)^2 - 2x[(x^2+1)']}{(x^2+1)^4} = \frac{2 \cdot (x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2 \cdot (x^2+1) \cdot (x^2+1-4x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2 \cdot (1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$$1-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
$f''$	-	○	+	○	-
$f$	$\cap$	$\cup$	$\cup$	$\cap$	
		Σ.Κ	Σ.Κ		

Η  $f$  κυρτή στο  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$  και κοίλη στο  $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$  και στο  $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

Η  $f$  παρουσιάζει σημεία καμπής στο  $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  με

$$f(x_1) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{4} \text{ το } A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right) \text{ και στο } x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ με}$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{4} \text{ το } B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$$

**B<sub>3</sub>**. Αφού  $A_f = \mathbb{R}$  η  $C_f$  δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

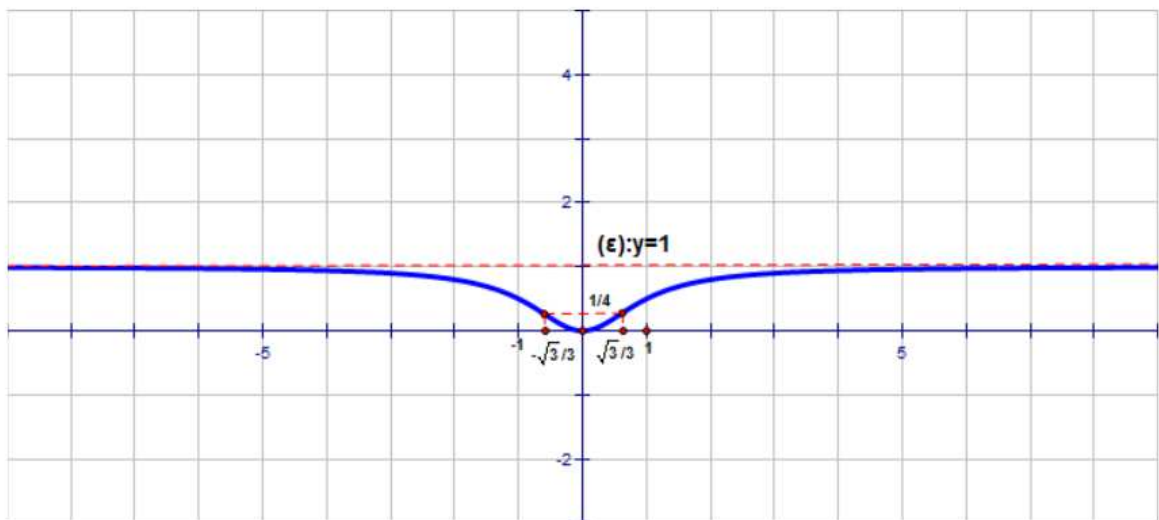
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Συνεπώς η  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη την  $(\varepsilon) : y = 1$  στο  $-\infty$  και στο  $+\infty$

Επειδή έχει οριζόντιες ασύμπτωτες δεν έχει πλάγιες.

**B<sub>4</sub>**. Με βάση τις απαντήσεις στα ερωτήματα **B<sub>1</sub>**, **B<sub>2</sub>**, **B<sub>3</sub>** σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της  $f$  και την γραφική της παράσταση.

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$0$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
$f'$	-	-	○	+	+	
$f''$	-	○	+	+	○	-
$f$	1	↘ Σ.Κ 1/4	↘ Τ.ε 0	↗ Σ.Κ 1/4	↗ 1	



### ΘΕΜΑ Γ

Γ<sub>1</sub>. Έστω συνάρτηση  $g(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$

Η  $g(x) = 0$  έχει προφανή ρίζα το  $x = 0$

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - 2x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (e^{x^2} - 1) = 0 \text{ οι ρίζες της εξίσωσης είναι μόνο η } x = 0$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} - 1) > 0 \text{ με τη βοήθεια του πίνακα προσήμων έχουμε}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$2x$	-	+	
$e^{x^2} - 1$	+	+	
$2x(e^{x^2} - 1)$	-	+	

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$g(x)$	↘		↗

**Ο.Ε(0,0)**

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$  άρα η  $x = 0$  μοναδική λύση ως θέση ακροτάτου.

**Γ<sub>2</sub>.**

$$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = |e^{x^2} - x^2 - 1| = e^{x^2} - x^2 - 1$$

Καθώς από  $\Gamma_1$  ισχύει  $e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$

Είναι  $f$  συνεχής και  $f(x) \neq 0$  για  $x \neq 0$  άρα η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$  άρα

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}, \quad \text{ή} \quad f(x) = -e^{x^2} + x^2 + 1, x \in \mathbb{R}, \quad \text{ή}$$

$$\text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \leq 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$$

**Γ<sub>3</sub>.**  $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$

Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)' = 2xe^{x^2} - 2x$  και

$$f''(x) = (2xe^{x^2} - 2x)' = e^{x^2} 4x^2 + 2e^{x^2} - 2$$

Θέτουμε  $f''(x) = 0$  η οποία έχει προφανή ρίζα  $x = 0$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= (e^{x^2} 4x^2 + 2e^{x^2} - 2)' = 2xe^{x^2} 4x^2 + 8xe^{x^2} + 2e^{x^2} 2x = \\ &= 4xe^{x^2} (2x^2 + 3) \end{aligned}$$

$$f^{(3)}(x) = 0 \Leftrightarrow 4xe^{x^2} (2x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f^{(3)}(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f''(x)$			

$$x < 0 \stackrel{f'' \downarrow}{\Rightarrow} f''(x) > f''(0) \Leftrightarrow f''(x) > 0$$

$$x > 0 \stackrel{f'' \uparrow}{\Rightarrow} f''(x) > f''(0) \Leftrightarrow f''(x) > 0$$

Οπότε η  $f$  κυρτή  $\mathbb{R}$  διότι η  $f''$  συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

**Γ4.** Θεωρούμε συνάρτηση  $\varphi(x) = f(x+3) - f(x)$ , οπότε η ζητούμενη εξίσωση γίνεται:

$$\varphi(|\eta\mu x|) = \varphi(x), \quad x \geq 0$$

Παραγωγίζουμε τη σχέση και έχουμε:  $\varphi'(x) = f'(x+3) \cdot 1 - f'(x) = f'(x+3) - f'(x)$

Όμως έχουμε  $f''(x) > 0$  άρα  $f'$  γνησίως αύξουσα

$$x+3 > x \Leftrightarrow f'(x+3) > f'(x) \text{ επομένως } \varphi'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

Οπότε έχουμε:  $\varphi$  γνησίως αύξουσα επομένως και  $1 - 1$ .

$$\text{Έτσι: } \varphi(|\eta\mu x|) = \varphi(x) \stackrel{\varphi:1-1}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x| = x$$

Άρα μοναδική ρίζα η  $x = 0$  διότι το  $|x| \geq |\eta\mu x|$  και η ισότητα ισχύει μόνο στο 0.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$ . Θέτω  $g(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Rightarrow f(x) = g(x)\eta\mu x, x \neq 0$ . Παίρνοντας τα όρια έχω:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x)\eta\mu x) \stackrel{\text{συνεχής}}{\Rightarrow} f(0) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$1^\circ \text{ μέλος} = \int_0^\pi (f(x) + f''(x))\eta\mu x dx = \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx + \int_0^\pi (f'(x))' \eta\mu x dx =$$

$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)(\eta\mu x)' dx = \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx + f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\eta\mu 0 - \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx - \left( \int_0^\pi f(x)\sigma\upsilon\nu x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f(x)(\sigma\upsilon\nu x)' dx \right) = \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx - (f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi - f(0)\sigma\upsilon\nu 0) - \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx =$$

$$f(\pi) - f(0) = f(\pi) - 0 = f(\pi). \text{ Άρα } f(\pi) = \pi$$

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{f'(0)}{1} = f'(0) \quad (f' \text{ συνεχής αφού υπάρχει η } f'')$$

**Δ<sub>2</sub>.** α) Έστω ότι η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_0 \in \mathbb{R}$  άρα από Θεώρημα Fermat:

$$f'(x_0) = 0. \text{ Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση έχω: } e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x. \text{ Για}$$

$$x = x_0 \text{ έχω: } e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow 0 + 1 = 0 + e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow e^{x_0} = e^0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

ΑΤΟΠΟ γιατί  $f'(0) = 1$

**β)**  $f'$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  (2 φορές παραγωγίσιμη)

$$f'(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}, \text{ άρα η } f \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο } \mathbb{R}. \text{ Έχουμε } f'(0) = 1 > 0,$$

επομένως  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \uparrow$  στο  $\mathbb{R}$ .

**Δ<sub>3</sub>.** Επειδή το  $x \rightarrow +\infty$ , περιοριζόμαστε στο  $[0, +\infty)$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0. \text{ Επειδή } f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) \text{ με } f \nearrow \text{ και συνεχή τότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| = \left| \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \right| \leq \frac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(x)} = \frac{2}{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{2}{f(x)} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{f(x)}, \text{ άρα από κριτήριο παρεμβολής}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

**Δ<sub>4</sub>.** Υπολογίζω το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_1^{e^\pi} \left( \frac{f(\ln x)}{x} \right) dx = \int_1^{e^\pi} f(\ln x) (\ln x)' dx = \int_1^{e^\pi} f(\ln x) \frac{1}{x} dx \stackrel{\text{θέτω } u = \ln x}{=} \int_0^\pi f(u) du$$

$$du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$$

$$x = 1 \Leftrightarrow u = \ln 1 = 0$$

$$x = e^\pi \Leftrightarrow u = \ln e^\pi = \pi$$

Από  $0 \leq u \leq \pi \Leftrightarrow f(0) \leq f(u) \leq f(\pi)$ . Η ισότητα ισχύει για  $u = 0$  και  $u = \pi$ , άρα:

$$\int_0^{\pi} du < \int_0^{\pi} f(u) du < \int_0^{\pi} f(\pi) du \Leftrightarrow \left( \text{με απόδειξη του } f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \right)$$

$$0 < \int_0^{\pi} f(u) du < \pi(\pi - 0) \Leftrightarrow$$

$$0 < \int_0^{\pi} f(u) du < \pi^2$$