ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:	*09/ 06 /2017*
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:	***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π***

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 135

Α2. α) Λ

β) Έστω $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1 \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1 \ .$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

Α3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 73

Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

Θέμα Β

Έχουμε την $f(x)=\ln x$ με πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=(0,+\infty)$

Και την $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$ με πεδίο ορισμού το $B=\mathbb{R}-\{1\}$

Β1. $\Gamma=\left\{\begin{matrix} x\in B \\ g(x)\in A\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} x\neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x}>0\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} x\neq 1 \\ x\cdot(1-x)>0\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} x\neq 1 \\ 0<x<1\end{matrix}\right\}=(0,1)$

$$f\left(g\left(x\right)\right)=\ln\left(g\left(x\right)\right)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \text{ με } x\in(0,1)$$

B2. Η h είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων επομένως έχουμε:

$$h'(x)=\left[\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]'=\frac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{x\cdot(1-x)}>0,\ \text{αφού}\quad x\in(0,1)$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα επομένως και «1 – 1» άρα ορίζεται η αντίστροφη της.

Θέτουμε $h(x)=y\Leftrightarrow\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=y\Leftrightarrow\frac{x}{1-x}=e^y\Leftrightarrow x=e^y\cdot(1-x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=e^y-x\cdot e^y\Leftrightarrow x\cdot e^y+x=e^y\Leftrightarrow x\cdot\left(e^y+1\right)=e^y\Leftrightarrow x=\frac{e^y}{e^y+1},\ y\in\mathbb{R}$$

$$x\in(0,1)\Leftrightarrow 0<\frac{e^y}{e^y+1}<1\Leftrightarrow y\in\mathbb{R}$$

Επομένως έχουμε την $h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$

B3. $\varphi(x)=\frac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$

$$\varphi'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'=\frac{e^x\cdot\left(e^x+1\right)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0$$

Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα συνεπώς ΔΕΝ έχει ακρότατα αφού έχει και ως πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

$$\varphi''(x)=\left(\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right)'=\frac{e^x\cdot\left(e^x+1\right)^2-e^x\cdot 2\left(e^x+1\right)\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^4}=$$

$$=\frac{e^x\cdot\left(e^x+1\right)\left(e^x+1-2e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{e^x\cdot\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$$

$$\varphi''(x)\geq\frac{e^x\cdot\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}\Leftrightarrow 1-e^x\geq 0\Leftrightarrow e^x\leq 1\Leftrightarrow e^x\leq e^0\overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow}x\leq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
φ	∪		∩

Η φ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και η φ είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$

Η φ εμφανίζει σημείο καμπής στο $x_0=0$ το $(0,\varphi(0))=\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

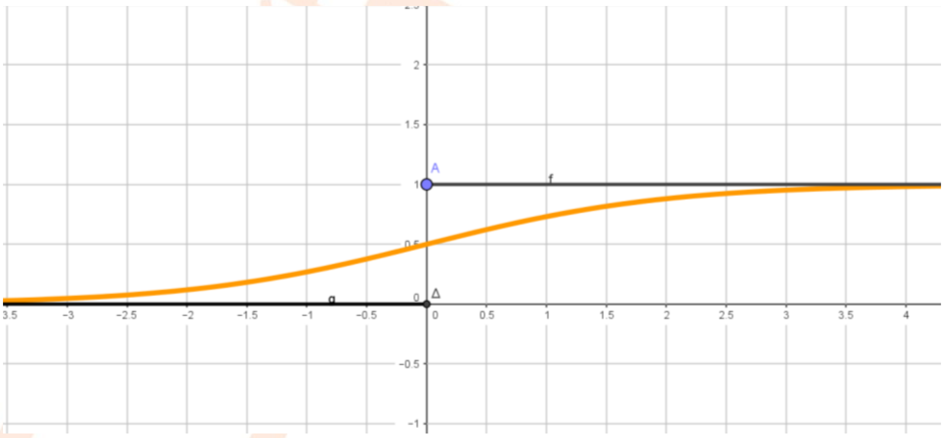
Β4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$

Επομένως έχει οριζόντιες ασύμπτωτες τις

$y=0$ καθώς $x\to-\infty$ και την $y=1$ καθώς $x\to+\infty$

Η γραφική παράσταση της φ είναι:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=-\eta\mu x,\ [0,\pi]$

$f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x,\ [0,\pi]$

Έστω $\mathrm{M}(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f στο οποίο δέχεται εφαπτομένη που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$. Η εξίσωση εφαπτομένης είναι:

$(\varepsilon): \mathrm{y}-\mathrm{f}(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0) \Leftrightarrow \mathrm{y}-\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\cdot(x-x_0)$

Το $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\in(\varepsilon): -\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow$

$-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x_0+x_0\cdot\sigma\upsilon\nu x_0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)+\eta\mu x_0-\frac{\pi}{2}=0$

Θεωρούμε συνάρτηση: $g(x)=\sigma\upsilon\nu x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu x-\frac{\pi}{2}$

Παρατηρούμε με αντικατάσταση ότι: $g(0)=0$ και $g(\pi)=0$

$g'(x)=-\eta\mu x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι: $g'(x)<0$

Για $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι: $g'(x)>0$

x	0	$\pi/2$	π
$g'(x)$	-		+
g	↘		↗
T.M		T.E	T.M

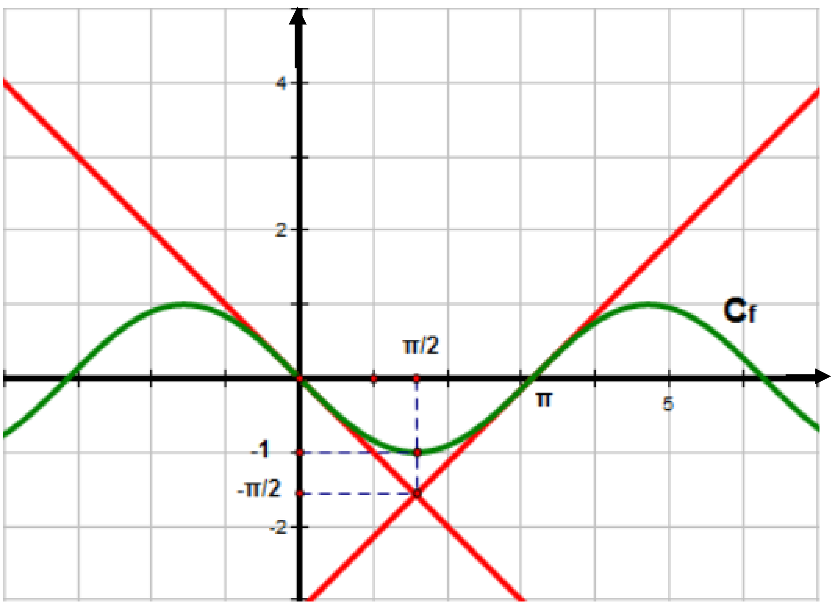
Η g συνεχής στο $[0,\pi]$ με $g_{\max}=g(0)=g(\pi)=0$

Άρα μοναδικές λύσεις $x=0$ και $x=\pi$

Συνεπώς οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι:

$(\varepsilon_1): y=-x$ και $(\varepsilon_2): y=x-\pi$

Γ2.



Τομή $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : \mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(\mathrm{x}) = \eta\mu x > 0$ **για** $x \in (0, \pi)$ οπότε f κυρτή $[0, \pi]$ επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξαίρεση τα σημεία επαφής αντίστοιχα.

$\mathrm{A}\rho\alpha\ f(\mathrm{x}) \geq -\mathrm{x} \Leftrightarrow \mathrm{f(x)} + \mathrm{x} \geq 0$

$$\gamma\iota\alpha\ x \in [0, \pi]$$

$\kappa\alpha\iota\ \ f(\mathrm{x}) \geq \mathrm{x} - \pi \Leftrightarrow \mathrm{f(x)} - x + \pi \geq 0$

$$\mathrm{E}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{f(x)} + x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\mathrm{f(x)} + x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\eta\mu x + x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\eta\mu x - x + \pi)\, dx$$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}\,\tau\mu$$

$$\mathrm{E}_2 = \int_0^{\pi} \left(-f(\mathrm{x})\right) \mathrm{dx} = \int_0^{\pi} \eta\mu x\, \mathrm{dx} = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2\,\tau\mu$$

Επομένως έχουμε $\dfrac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2} = \dfrac{\frac{\pi^2 - 8}{4}}{2} = \dfrac{\pi^2}{8} - 1$

Γ3. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{f(\mathrm{x}) + \mathrm{x}}{f(\mathrm{x}) - \mathrm{x} + \pi} = \lim\limits_{x \to \pi} \left[\dfrac{1}{f(\mathrm{x}) - \mathrm{x} + \pi} \cdot \left(f(\mathrm{x}) + \mathrm{x}\right)\right] = +\infty$

Διότι $\lim\limits_{x \to \pi}\left(f(x) + \pi\right) = \lim\limits_{x \to \pi}\left(-\eta\mu x + \pi\right) = \pi$ και $f(\mathrm{x}) - \mathrm{x} + \pi > 0$ για $x \in (0, \pi)$ επομένως έχουμε:

$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1}{f(\mathrm{x}) - \mathrm{x} + \pi} = +\infty$

Γ4. Είναι $f(\mathrm{x}) > \mathrm{x} - \pi,\ \mathrm{x} \in [1, \mathrm{e}]$ απο το ερώτημα Γ2 (το ίσον ισχύει μόνο για $x = \pi > e$)

οπότε $\dfrac{f(\mathrm{x})}{x} > 1 - \dfrac{\pi}{x}, x \in [1, \mathrm{e}]$ άρα και

$$\int_1^e \frac{f(\mathrm{x})}{x} dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx \Rightarrow \int_1^e \frac{f(\mathrm{x})}{x} dx > \left[x - \pi \ln \mathrm{x}\right]_1^e = e - \pi - (1 - 0) \Rightarrow \int_1^e \frac{f(\mathrm{x})}{x} dx > e - \pi - 1$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ συνεχής για κάθε $x \in [-1, 0)$ ως σύνθεση συνεχών

$f(x) = e^x \eta\mu x$ συνεχής για κάθε $x \in (0, \pi]$ ως πράξεις συνεχών.

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0$ και

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$

επομένως έχουμε $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ άρα η f συνεχής στο $x_0 = 0$

επομένως έχουμε f συνεχής στο $[-1, \pi]$

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (-1,0)$ με

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)' = \left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)' = -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}$$

Η f παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x) = \left(e^x \eta\mu x\right)' = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

Επομένως έχουμε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-1,0)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow$$
$$e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Rightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \overset{\eta\mu x \neq 0}{\Rightarrow} \sigma\varphi x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Οπότε $x = \frac{3\pi}{4}$ κρίσιμο σημείο (ως σημείο μηδενισμού) της $f'(x)$

Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της f στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sqrt[3]{x^4}-0}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|^{\frac{4}{3}}}{x} = -\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-x}\right) = -\lim_{x\to 0^-}\left((-x)^{\frac{1}{3}}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x \cdot \eta\mu x - 0}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x}\right) = e^0 \cdot 1 = 1$$

Επειδή: $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) \neq \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$ άρα δεν υπάρχει η παράγωγος στο $x_1 = 0$

Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f είναι τα εσωτερικά σημεία στα οποία μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος και τα σημεία στα οποία δεν παραγωγίζεται άρα $x_0 = \frac{3\pi}{4}, x_1 = 0$

Επομένως έχουμε $f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}, & x \in [-1,0) \\ e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x), & x \in [0,\pi) \end{cases}$

Δ2. $f'(x) = -\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}} < 0$ άρα γνησίως φθίνουσα $(-1,0)$

$f'(x) = e^x \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$ με $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4}$

Επομένως από τον πίνακα μονοτονίας έχουμε

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		-	‖	+		-	
f		↘		↗		↘	
			Τ.Ε		Τ.Μ		

Στο $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ f' συνεχής με $f'(x)\neq 0$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο με επιλεγμένη τιμή την τιμή $\frac{\pi}{2}$ έχουμε: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot 1>0 \Rightarrow f'(x)>0,\ x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$

Στο $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ f' συνεχής με $f'(x)\neq 0$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο με επιλεγμένη τιμή την τιμή $\frac{5\pi}{6}$ έχουμε: $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<0 \Rightarrow f'(x)<0,\ x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

Συνεπώς έχουμε: f ↘ στα διαστήματα $[-1,0]$ και $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ και f ↗ στο διάστημα $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$

Για $x=-1 \Rightarrow f(-1)=1$ τοπ. μέγιστο

Για $x=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$ τοπ. μέγιστο

Για $x=0 \Rightarrow f(0)=0$ τοπ. ελάχιστο

Για $x=\pi \Rightarrow f(\pi)=0$ τοπ. ελάχιστο

Επομένως έχουμε: $f\left([-1,\pi]\right)=\left[0,e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Δ3. Το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, της g, τον άξονα yy' και την ευθεία $x=\pi$ ισούται με:

$$E(\Omega)=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\pi}\left|e^x\cdot\left(\eta\mu x-e^{4x}\right)\right|dx$$

Έστω $h(x)=\eta\mu x-e^{4x}$, $x\in[0,\pi]$

Για $0\le x\le\pi \Rightarrow 0\le 4x \Rightarrow e^0\le e^{4x} \Rightarrow 1\le e^{4x}$

Είναι για $x\in\mathbb{R}$ $\eta\mu x\le 1 \Rightarrow \eta\mu x<e^{4x} \Rightarrow \eta\mu x-e^{4x}<0$

Αρα $h(x)=\eta\mu x-e^{4x}<0$

$$E(\Omega)=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\pi}\left|e^x\cdot\eta\mu x-e^{5x}\right|dx=$$
$$=\int_0^{\pi}\left(-e^x\cdot\eta\mu x+e^{5x}\right)dx=\int_0^{\pi}\left(-e^x\cdot\eta\mu x\right)dx+\int_0^{\pi}e^{5x}dx=I_1+I_2$$

Είναι

$$\mathrm{I}_1=\int_0^{\pi}\left(-e^x\cdot\eta\mu x\right)dx=\int_0^{\pi}\left(\left(-e^x\right)'\cdot\eta\mu x\right)dx=\left[-e^x\cdot\eta\mu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\left(e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx=0+\int_0^{\pi}\left(\left(e^x\right)'\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$$
$$=\left[e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(e^x\cdot(-\eta\mu x)\right)dx\Rightarrow\mathrm{I}_1=-e^{\pi}-1-\mathrm{I}_1\Rightarrow2\mathrm{I}_1=-e^{\pi}-1\Rightarrow\mathrm{I}_1=\frac{-e^{\pi}-1}{2}$$

$$I_2=\int_0^{\pi}e^{5x}dx=\frac{1}{5}\left[e^{5x}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{5}\left[e^{5\pi}-1\right]$$
$$I_1+I_2=\frac{-e^{\pi}-1}{2}+\frac{1}{5}\left[e^{5\pi}-1\right]=\frac{2e^{5\pi}-7-5e^{\pi}}{10}$$

Δ4. $16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f(\mathrm{x})-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4\mathrm{x}-3\pi)^2=8\sqrt{2}\Leftrightarrow16\cdot f(\mathrm{x})-(4\mathrm{x}-3\pi)^2=8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow16\cdot f(\mathrm{x})=8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}+(4\mathrm{x}-3\pi)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(\mathrm{x})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}+\frac{(4\mathrm{x}-3\pi)^2}{16}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(\mathrm{x})=f_{\max}+\frac{(4\mathrm{x}-3\pi)^2}{16}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f_{\max}=f(\mathrm{x})-\frac{(4\mathrm{x}-3\pi)^2}{16}\geq f(\mathrm{x})$$

Επομένως έχουμε:

$$-\frac{(4\mathrm{x}-3\pi)^2}{16}\geq0\Leftrightarrow(4\mathrm{x}-3\pi)^2\leq0\Leftrightarrow(4\mathrm{x}-3\pi)^2=0\Leftrightarrow4\mathrm{x}-3\pi=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4},\text{δεκτή}$$