ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

& ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:	*25/05/2015*
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:	***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ***

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α₁. Σχολικό βιβλίο σελ. 194

Α₂. Σχολικό βιβλίο σελ. 188

Α₃. Σχολικό βιβλίο σελ. 259

Α₄. α) **Λ** β) **Σ** γ) **Λ** δ) **Σ** ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β₁. $|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)\cdot(\bar{z}-4)=4(z-1)\cdot(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$

$$z\cdot\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4z\cdot\bar{z}-4z-4\bar{z}+4 \Leftrightarrow 3z\cdot\bar{z}=12 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2 .

Β₂. α) Αρκεί να δείξουμε ότι: $w=\bar{w}$.

Είναι $|z_1|^2=4 \Leftrightarrow z_1\cdot\bar{z_1}=4 \Leftrightarrow \bar{z_1}=\dfrac{4}{z_1}$. Ομοίως $\bar{z_2}=\dfrac{4}{z_2}$.

$$\bar{w}=2\frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}+2\frac{\bar{z_2}}{\bar{z_1}}=\frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+\frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=\frac{8z_2}{4z_1}+\frac{8z_1}{4z_2}=\frac{2z_2}{z_1}+\frac{2z_1}{z_2}=w.$$ Άρα $w\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $|z_1|=|z_2|=2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=1$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$|w|=\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le\left|\frac{2z_1}{z_2}\right|+\left|\frac{2z_2}{z_1}\right|=2\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+2\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=4.$$

Δηλαδή $|w|\le 4\Leftrightarrow -4\le w\le 4$ διότι w είναι πραγματικός αριθμός .

B₃. $w=-4\Leftrightarrow 2\frac{z_1}{z_2}+2\frac{z_2}{z_1}=-4\Leftrightarrow 2z_1^2+2z_2^2=-4z_1z_2\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=0\Leftrightarrow$

$(z_1+z_2)^2=0\Leftrightarrow z_2=-z_1$.

Αν $z_1=\alpha+\beta\cdot i$, τότε $z_2=-\alpha-\beta\cdot i$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Ακόμα προκύπτει: $z_3=2i\cdot z_1=-2\beta+2\alpha\cdot i$.

Δηλαδή είναι $A(\alpha,\beta)$, $B(-\alpha,-\beta)$ και $\Gamma(-2\beta,2\alpha)$ οι εικόνες των z_1,z_2,z_3 αντίστοιχα.

$$\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=(-2\beta-\alpha)^2+(2\alpha-\beta)^2=4\beta^2+4\alpha\beta+\alpha^2+4\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2=5(\alpha^2+\beta^2)=20$$

Άρα $(A\Gamma)=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=2\sqrt{5}$.

Ομοίως έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2=(\alpha-2\beta)^2+(2\alpha+\beta)^2=\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2+4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=5(\alpha^2+\beta^2)=20$$

Άρα $(B\Gamma)=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=2\sqrt{5}$. Οπότε $(A\Gamma)=(B\Gamma)=2\sqrt{5}$.

Προαιρετικά (δεν είναι απαραίτητο να αποδειχθεί)

(Τα σημεία δεν είναι συνευθειακά διότι $\det\left(\overrightarrow{A\Gamma},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=-4(\alpha^2+\beta^2)\ne 0$ οπότε αποτελούν κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.)

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, άρα :

$$f'(x)=\frac{e^x(x^2+1)-e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\ge 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για x=1άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x\,\frac{1}{x^2+1}\right) = 0\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim\frac{e^x}{x^2+1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\frac{e^x}{2x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\frac{e^x}{2} = +\infty$$

Συνεπώς το σύνολο τιμών της f είναι: $f(\mathbb{R}) = (0,+\infty)$

Γ2. $f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right) = \dfrac{e^2}{5} = f(2) \underset{\text{"1-1"}}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}} e^{3-x}\left(x^2+1\right) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{e^3}{e^x}\left(x^2+1\right) = 2 \Leftrightarrow$

$$\frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^3}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$$

Το $\dfrac{e^x}{2} \in f(\mathbb{R}) = (0,+\infty)$ συνεπώς υπάρχει $x_0 \in A_f$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \dfrac{e^3}{2}$ και επειδή η f γνήσια αύξουσα και συνεπώς “1-1” είναι και μοναδικό.

Γ3. Για κάθε x > 0 έχουμε το διάστημα [2x,4x] συνεπώς:

$$t \le 4x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(t) \le f(4x) \Leftrightarrow f(4x) - f(t) \ge 0.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για t=4x συνπεώς:

$$\int_{2x}^{4x}\left[f(4x)-f(t)\right]dt > 0 \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < \int_{2x}^{4x} f(4x)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x)\cdot\int_{2x}^{4x} 1\cdot dt \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x)\cdot 2x.$$

Γ4. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\cdot\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt, & x>0 \\ 2, & x=0 \end{cases}.$

Για $x>0$ θεωρώ $\alpha \in (0,+\infty)$ συνεπώς έχουμε: $\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt = \int_{\alpha}^{4x} f(t)dt - \int_{\alpha}^{2x} f(t)dt =$

Συνεπώς έχουμε: $g'(x) = \dfrac{\left(\displaystyle\int_{\alpha}^{4x} f(t)dt - \int_{\alpha}^{2x} f(t)dt\right)'\cdot x - \left(\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right)\cdot x'}{x^2} =$

$$= \frac{\left[4f(4x)-2f(2x)\right]\cdot x - \displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2} = \frac{2x\cdot f(4x) + 2x\cdot f(4x) - 2x\cdot f(2x) - \displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2} =$$

$$=\frac{2x\cdot\left(f(4x)-f(2x)\right)+\left(2x\cdot f(4x)-\int_{2x}^{4x}f(t)dt\right)}{x^2}$$

Ισχύουν τα εξής:

- ✓ $4x>2x\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(4x)>f(2x)\Leftrightarrow f(4x)-f(2x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2x\cdot\left(f(4x)-f(2x)\right)>0$
- ✓ Από **Γ₃.** έχουμε: $\int_{2x}^{4x}f(t)dt<2x\cdot f(4x)\Leftrightarrow 2x\cdot f(4x)-\int_{2x}^{4x}f(t)dt>0$

Άρα έχουμε:

$$\frac{2x\cdot\left(f(4x)-f(2x)\right)+\left(2x\cdot f(4x)-\int_{2x}^{4x}f(t)dt\right)}{x^2}>0\Leftrightarrow g'(x)>0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Θα εξετάσουμε συνέχεια στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_{\alpha}^{4x}f(t)dt-\int_{\alpha}^{2x}f(t)dt}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{4f(4x)-2f(2x)}{1}=$$

$$4f(0)-2f(0)=2f(0)=2=g(0).$$

Άρα η g συνεχής στο $x_0=0$ συνεπώς η g γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ₁. $f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2\Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot f'(x)+e^{-f(x)}\cdot f'(x)=2$

$$\left(e^{f(x)}\right)'=2-e^{-f(x)}\cdot f'(x)\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)'=\left(2x+e^{-f(x)}\right)'$$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ έχουμε: $e^{f(x)}=2x+e^{-f(x)}+c$

Για x=0: $e^{f(0)}=0+e^{-f(0)}+c\Leftrightarrow1=1+c\Leftrightarrow c=0$.

Επομένως $e^{f(x)}=2x+e^{-f(x)}\Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x\Leftrightarrow e^{f(x)}-\frac{1}{e^{f(x)}}=2x$

$$\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)^2-1=2xe^{f(x)}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1\ (1)$$

Έστω: $g(x)=e^{f(x)}-x, x\in\mathbb{R}$. Η g συνεχής στο R(ως διαφορά συνεχών)

Άρα από την (1) έχουμε: $g^2(x)=x^2+1 \Leftrightarrow g^2(x)\neq 0 \Leftrightarrow g(x)\neq 0$

Συνεπώς η $g(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R

$g(0)=e^{f(0)}-0=e^0=1>0$ άρα g(x) > 0 για κάθε $x\in R$

Από την σχέση (1) έχουμε:

$$\sqrt{g^2(x)}=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow |g(x)|=\sqrt{x^2+1} \overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow} g(x)=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)}=\sqrt{x^2+1}+x \\ \sqrt{x^2+1}+x>\sqrt{x^2}+x=|x|+x\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(x)\cdot \ell ne=\ell n\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\ell n\left(\sqrt{x^2+1}+x\right), x\in R$$

Δ₂.α) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'\right]$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x\right)=\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}}==\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Επειδή η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη έχουμε:

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\frac{-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}, x\in R$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad f''(x)>0 \Leftrightarrow -x\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}>0 \Leftrightarrow -x>0 \Leftrightarrow x<0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f´´	+	0	-
f	$\cup$		$\cap$

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$, ενώ παρουσιάζει στο $x_0=0$ σημείο καμπής το $f(0)=0$.

β) Η f συνεχής στο $x_0=0$ και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ επομένως υπάρχει η εφαπτομένη στο $x_0=0$. Έστω (ε) η εφαπτομένη του C_f στο $(0,f(0))=(0,0)$

$f'(0)=1$ άρα (ε): $y-0=1 \Leftrightarrow (\varepsilon): y=x$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=\int_0^1 |f(x)-x|dx$

Η F κοίλη στο $[0,+\infty) \Rightarrow f(x)\le x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

$f(x)-x<0 \Rightarrow |f(x)-x|=x-f(x)$

$$E=\int_0^1 (x-f(x))dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1\left(\ell n\sqrt{x^2+1}+x\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1 (x)'\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}-\left[x\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1+\int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}-\ell n\left(1+\sqrt{2}\right)+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Για το $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ έχουμε τον μετασχηματισμό:

- ✓ $u=x^2+1$
- ✓ $du=2xdx$
- ✓ $x=0 \Leftrightarrow u=1$
- ✓ $x=1 \Leftrightarrow u=2$

Συνεπώς: $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}2xdx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{\sqrt{u}}du=\frac{1}{2}\cdot 2\left[\sqrt{u}\right]_1^2=\sqrt{2}-1$

Άρα: $E=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ τ.μ

Δ3. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ από Δ_1 έχουμε ότι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε: $x>0 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0)=0 \Rightarrow f(x)>0$ για κάθε x>0 άρα: $|f(x)|=f(x)$.

Η συνάρτηση $h(x)=e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής στο $x_0=0$.

$$I=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot \ln f(x)\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\frac{1}{\ln f(x)}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)'}{\left(\frac{1}{\ln f(x)}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)'}{\left(\frac{1}{\ln f(x)}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot 2f(x)}{-\frac{f'(x)}{f(x)\cdot \ln^2 f(x)}}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[-e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot\frac{f(x)\left(f(x)\ln f(x)\right)^2}{f'(x)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-e^{\int_0^x f^2(t)dt}\right)\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)\ln f(x)\right)^2=$$

- ✓ $\lim_{x\to 0^+}\left(-e^{\int_0^x f^2(t)dt}\right)=-1$

- ✓ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{0}{1}=0$

- ✓ $\lim_{x\to 0^+}\left[f(x)\cdot \ln f(x)\right]\underset{x\to 0^+\Leftrightarrow u\to 0^+}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim_{u\to 0^+}(u\ln u)=\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\right)\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{(\ln u)'}{\left(\frac{1}{u}\right)'}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=$

$$=\lim_{u\to 0^+}(-u)=0.$$

Άρα: $I=(-1)\cdot 0\cdot 0^2=0$

Δ4. Έστω: $\kappa(x)=\left(1-3\int_0^{x-2}f(t^2)dt\right)(x-2)+(x-3)\left(8-3\int_0^x f(t^2)dt\right)$

$\kappa(x)$ συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις συνεχών.

$$\kappa(2) = -\left(8 - 3\int_0^2 f\left(t^2\right)dt\right)$$

$$\kappa(3) = 1 - 3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt$$

Ξέρω ότι: $f(t) \le t$ για κάθε $t \ge 0$. Βάζουμε όπου t το t^2 άρα:

$f\left(t^2\right) \le t^2$ (η ισότητα ισχύει για t=0).Οι συναρτήσεις $f\left(t^2\right), t^2$ είναι συνεχείς στο $[0,1]$. Άρα έχουμε:

$$t^2 - f\left(t^2\right) \ge 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(t^2 - f\left(t^2\right)\right)dt > 0 \Rightarrow \int_0^1 f\left(t^2\right)dt < \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt > -1 \Rightarrow 1 - 3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt > 0 \Rightarrow \kappa(3) > 0$$

Επίσης: $0 < f(t) \le t \Rightarrow f^2(t) \le t^2$. (η ισότητα ισχύει για t=0).Οι συναρτήσεις $f^2(t), t^2$ είναι συνεχείς στο $[0,1]$. Άρα έχουμε:

$$t^2 - f\left(t^2\right) \ge 0 \Rightarrow \int_0^2 \left(t^2 - f\left(t^2\right)\right)dt > 0 \Rightarrow \int_0^2 f^2(t)dt < \int_0^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\int_0^2 f^2(t)dt > -3 \cdot \frac{8}{3} \Rightarrow 8 - 3\int_0^2 f^2(t)dt > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left(8 - 3\int_0^2 f^2(t)dt\right) < 0 \Rightarrow \kappa(2) < 0$$

Επειδή: $\kappa(2) \cdot \kappa(3) < 0$ συνεπώς από Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε: $\kappa(x_0) = 0$.