ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ / Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΣΕΙΡΑ:	**1η ΣΕΙΡΑ / ΘΕΡΙΝΑ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	**20/11/11**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Θεωρία σελ. 167 , από το σχολικό

A.2 Θεωρία σελ. 188 , από το σχολικό

A.3 Θεωρία σελ. 191, από το σχολικό

B. **α.** Σ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Σ

ΘΕΜΑ 2ο

$$xf(x)=\sqrt{x^2+12}-2f(x)+\lambda, x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow xf(x)+2f(x)=\sqrt{x^2+12}+\lambda, x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$(x+2)f(x)=\sqrt{x^2+12}+\lambda, x\in\mathbb{R} \quad (1)$$

α. Για $x=-2$ η (1) γίνεται $0\cdot f(-2)=\sqrt{16}+\lambda \Leftrightarrow \lambda=-4$

β. Για $\lambda=-4$ η (1) γίνεται:

$$(x+2)f(x)=\sqrt{x^2+12}-4 \overset{x\neq-2}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x+2}, x\neq-2$$

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο $x_0=-2$

Επομένως $$f(-2)=\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+12-16}{(x+2)(\sqrt{x^2+12}+4)}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(\sqrt{x^2+12}+4)}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

Άρα :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{x+2}, & x\neq-2\\ -\dfrac{1}{2}, & x=-2\end{cases}$$

γ. $\lim_{x\to-2}(2f(x)-5)=2(-\frac{1}{2})-5=-6<0$. Επομένως $2f(x)-5<0$ «κοντά» στο $x_0=-2$

Έχουμε :

$$\lim_{x\to-2}\frac{4f^2(x)-10f(x)-|2f(x)-5|}{\sqrt{2f(x)+5}-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{4f^2(x)-10f(x)+2f(x)-5}{\sqrt{2f(x)+5}-2}=\lim_{x\to-2}\frac{4f^2(x)-8f(x)-5}{\sqrt{2f(x)+5}-2}=$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{4(f(x)+\frac{1}{2})(f(x)-\frac{5}{2})(\sqrt{2f(x)+5}+2)}{2f(x)+5-4}=\lim_{x\to-2}\frac{4(f(x)+\frac{1}{2})(f(x)-\frac{5}{2})(\sqrt{2f(x)+5}+2)}{2(f(x)+\frac{1}{2})}=$$

$$\frac{4(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2})(\sqrt{2(-\frac{1}{2})+5}+2)}{2}=2\cdot(-3)\cdot 4=-24$$

δ. $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{12}{x^2})}-4}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{12}{x^2}}-4}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{12}{x^2}}-4}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-\sqrt{1+\frac{12}{x^2}}-\frac{4}{x})}{x(1+\frac{2}{x})}=\frac{-\sqrt{1+0}-0}{1+0}=-1$$

Και $$\lim_{x\to-\infty}\frac{5-3f(x)}{2f^2(x)+4f(x)+2}\overset{(\frac{a}{0})}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{(f(x)+1)^2}\cdot\frac{5-3f(x)}{2}\right]=+\infty$$

Διότι $\lim_{x\to-\infty}\frac{5-3f(x)}{2}=4$ και $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(f(x)+1)^2}=+\infty$, αφού $(f(x)+1)^2>0$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Θέτουμε $\varphi(x)=\frac{g(x)-1}{x^2-4x}$, για x «κοντά» στο 4

Οπότε $g(x)=(x^2-4x)\cdot\varphi(x)+1$ με $\lim_{x\to4}\varphi(x)=2$

Τότε : $\lim_{x\to4}g(x)=\lim_{x\to4}\left[(x^2-4x)\varphi(x)+1\right]=(4^2-4\cdot4)\cdot2+1=1$

β. Είναι $\frac{g(x)(x-4)}{\sqrt{x+5}-3}\le f(x)\le\frac{3g(x)(x^2-6x+8)}{\eta\mu(x-4)}$

$$\lim_{x\to4}\frac{g(x)(x-4)}{\sqrt{x+5}-3}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to4}\frac{g(x)(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x+5-9}=1\cdot6=6 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{3g(x)(x^2-6x+8)}{\eta\mu(x-4)}=\lim_{x\to4}\frac{3g(x)(x-2)(x-4)}{\eta\mu(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{3g(x)\cdot(x-2)}{\frac{\eta\mu(x-4)}{x-4}}=\frac{3\cdot1\cdot(4-2)}{1}=\frac{6}{1}=6$$

Αφού $\lim_{x\to4}\frac{\eta\mu(x-4)}{x-4}\overset{u=x-4}{=}\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

Από Κ.Π. θα είναι $\lim_{x\to4}f(x)=6$

γ. Αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}-\{1\}$, τότε f συνεχής στο 4, οπότε $f(4)=\lim_{x\to4}f(x)=6$

Είναι $f(x)=\frac{(2\alpha-\beta)x^2+(2\beta-3\alpha)x-5\alpha-\beta}{x^2-5x+4}$, $x\neq1$, $x\neq4$

άρα $(2\alpha-\beta)x^2+(2\beta-3\alpha)x-5\alpha-\beta=(x^2-5x+4)\cdot f(x)$

Επομένως $\lim_{x\to4}\left[(2\alpha-\beta)x^2+(2\beta-3\alpha)x-5\alpha-\beta\right]=\lim_{x\to4}\left[(x^2-5x+4)f(x)\right]\Leftrightarrow$

$(2\alpha-\beta)16+(2\beta-3\alpha)4-5\alpha-\beta=0\cdot6\Leftrightarrow$

$15\alpha-9\beta=0\Leftrightarrow15\alpha=9\beta\Leftrightarrow5\alpha=3\beta\Leftrightarrow\alpha=\frac{3\beta}{5}$

Για $\alpha=\frac{3\beta}{5}$ είναι:

$$\lim_{x\to4}f(x)=6\Leftrightarrow\lim_{x\to4}\frac{\frac{\beta}{5}x^2+(2\beta-\frac{9\beta}{5})x-3\beta-\beta}{x^2-5x+4}=6\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to4}\frac{\beta x^2+\beta x-20\beta}{5(x-1)(x-4)}=6\Leftrightarrow\lim_{x\to4}\frac{\beta(x^2+x-20)}{5(x-1)(x-4)}=6\Leftrightarrow\frac{9\beta}{5\cdot3}=6\Leftrightarrow\beta=10$$

Οπότε $\alpha=6$

δ. $\lim_{x\to4}h(x)=\lim_{x\to4}\frac{5x+2}{|g(x)-1|}=\lim_{x\to4}\left(\frac{1}{|g(x)-1|}\cdot(5x+2)\right)=+\infty$

αφού $\lim_{x\to4}|g(x)-1|=0$ και $|g(x)-1|>0$, $\lim_{x\to4}(5x+2)=22>0$

Άρα $\lim_{x\to4}\left(\sqrt{h^2(x)+2h(x)+3}-\gamma\cdot h(x)\right)=$

$$\lim_{x\to4}\left(|h(x)|\sqrt{1+\frac{2}{h(x)}+\frac{3}{h^2(x)}}-\gamma\cdot h(x)\right)=\lim_{x\to4}h(x)\left(\sqrt{1+\frac{2}{h(x)}+\frac{3}{h^2(x)}}-\gamma\right)=$$

$+\infty\cdot(1-\gamma)$

Αν $\gamma>1$ τότε το όριο είναι $-\infty$

Αν $\gamma<1$ τότε το όριο είναι $+\infty$

Αν $\gamma=1$ έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)\cdot0$ οπότε το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{h^2(x)+2h(x)+3}-h(x)\right)=\lim_{x\to 4}\frac{h^2(x)+2h(x)+3-h^2(x)}{\sqrt{h^2(x)+2h(x)+3}+h(x)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{2h(x)+3}{|h(x)|\sqrt{1+\frac{2}{h(x)}+\frac{3}{h^2(x)}}+h(x)}=\lim_{x\to 4}\frac{h(x)(2+\frac{3}{h(x)})}{h(x)(\sqrt{1+\frac{2}{h(x)}+\frac{3}{h^2(x)}}+1)}=1$$

Αφού $\lim_{x\to 4}h(x)=+\infty$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. $f^3(x)+3f(x)-x=5 \Leftrightarrow f^3(x)+3f(x)=x+5 \quad (1)$

Θέτουμε όπου x το x_0: $f^3(x_0)+3f(x_0)=x_0+5$

Αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε:

$f^3(x)-f^3(x_0)+3f(x)-3f(x_0)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$(f(x)-f(x_0)\cdot(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0))+3(f(x)-f(x_0))=x-x_0 \Leftrightarrow$

$(f(x)-f(x_0))\cdot(f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)+3)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3} \quad (2)$$

Αφού $f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\geq 0$ ως τριώνυμο του $f(x)$ με $\Delta=-3f^2(x_0)\leq 0$

Οπότε $f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)+3\geq 3>1$

Από (2) έχουμε:

$$|f(x)-f(x_0)|=\frac{|x-x_0|}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3}\leq\frac{|x-x_0|}{3}$$

Επομένως $|f(x)-f(x_0)|\leq\frac{|x-x_0|}{3} \Leftrightarrow -\frac{|x-x_0|}{3}\leq f(x)-f(x_0)\leq\frac{|x-x_0|}{3}$

$\lim_{x\to x_0}(-|x-x_0|)=0=\lim_{x\to x_0}|x-x_0|$ και από κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ δηλαδή στο $\mathbb{R}$.

β. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$

Έχουμε ισοδύναμα:

φροντιστήρια πουκαμισάς

$f^3(x_1)=f^3(x_2)$ και $3f(x_1)=3f(x_2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει: $f^3(x_1)+3f(x_1)=f^3(x_2)+3f(x_2)$

Οπότε από (1): $x_1+5=x_2+5 \Leftrightarrow x_1=x_2$. Άρα η f είναι 1 – 1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y \overset{y\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y)=x$ οπότε η (1) γράφεται:

$y^3+3y=f^{-1}(y)+5, y\in\mathbb{R}$

Άρα $f^{-1}(x)=x^3+3x-5, x\in\mathbb{R}$

γ. i). Από α f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο $x_0=-1$ άρα $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$.

Έστω $f(-1)=\kappa \Leftrightarrow f^{-1}(\kappa)=-1 \Leftrightarrow f^{-1}(\kappa)=f^{-1}(1) \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(\kappa)\right)=f\left(f^{-1}(1)\right) \Leftrightarrow \kappa=1$

Άρα $f(-1)=1$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$

ii). $|\eta\mu(2011x)|\le 1 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \left|\dfrac{f^{-1}(x)\cdot\eta\mu(2011x)}{x^{2012}}\right| \le \left|\dfrac{f^{-1}(x)}{x^{2012}}\right| \Leftrightarrow$

$$-\left|\frac{f^{-1}(x)}{x^{2012}}\right| \le \frac{f^{-1}(x)\eta\mu(2011x)}{x^{2012}} \le \left|\frac{f^{-1}(x)}{x^{2012}}\right|$$

Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{x^{2012}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+3x-5}{x^{2012}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^{2012}}=0$

Επομένως $\lim\limits_{x\to +\infty}\left|\dfrac{f^{-1}(x)}{x^{2012}}\right|=0=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\left|\dfrac{f^{-1}(x)}{x^{2012}}\right|\right)$ και σύμφωνα με το Κ.Π.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f^{-1}(x)\cdot\eta\mu(2011x)}{x^{2012}}=0$$

δ. $f^{-1}(f(x^2+6x)+1)=-1 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(f(x^2+6x)+1)=f^{-1}(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x^2+6x)+1=1 \Leftrightarrow f(x^2+6x)=0$

Είναι $f^{-1}(0)=-5 \Leftrightarrow f(-5)=0$ οπότε η εξίσωση γράφεται:

$f(x^2+6x)=f(-5) \overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$x^2+6x=-5 \Leftrightarrow x^2+6x+5=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=-5$