ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤ. / Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΑΠΟΦΟΙΤΟΙ**
ΣΕΙΡΑ:	**ΧΕΙΜΕΡΙΝΑ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	**20/11/11**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α.1 Θεωρία σελ. 98 , από το σχολικό
Α.2 Θεωρία σελ. 90 , από το σχολικό
Α.3 Θεωρία σελ. 151,152, από το σχολικό
Β. **α.** Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Λ

ΘΕΜΑ 2^{ο}

α. $|2iz-2-6i| = 2|z-5-3i| \Leftrightarrow (z = x+yi)$

$$|2i(x+yi)-2-6i| = 2|x+yi-5-3i| \Leftrightarrow$$
$$|2xi-2y-2-6i| = 2|x-5+(y-3)i| \Leftrightarrow$$
$$|(-2y-2)+(2x-6)i| = 2|x-5+(y-3)i| \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(-2y-2)^2+(2x-6)^2} = 2\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow$$
$$4y^2+8y+4+4x^2-24x+36 = 4(x^2-10x+25+y^2-6y+9) \Leftrightarrow$$
$$8y+4-24x = -40x+100-24y \Leftrightarrow$$
$$32y+16x-96 = 0 \overset{:16}{\Leftrightarrow} 2y+x-6=0$$

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι η ευθεία $\varepsilon: 2y+x-6=0$

β. Για κάθε $M \in \varepsilon$ ισχύει $OM \geq OA = d(O,\varepsilon)$ με $|z| = OM$, άρα

$$|z|\min = d(0,\varepsilon) = \frac{|1\cdot 0+2\cdot 0-6|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

γ. Φέρνουμε από το $O(0,0)$ ευθεία $\delta \perp \varepsilon$

Το σημείο τομής των δ, ε θα είναι η εικόνα του ζητούμενου μιγαδικού.

Είναι $\delta: y = \lambda x$ και αφού $\delta \perp \varepsilon$ τότε $\lambda \cdot \lambda\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda = 2$

Άρα $\delta: y = 2x$

$$\begin{Bmatrix} y = 2x \\ 2y+x-6=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 2x \\ 4x+x-6=0 \end{Bmatrix}$$

οπότε: $x=\frac{6}{5},\ y=\frac{12}{5}$

Άρα $z=\frac{6}{5}+\frac{12}{5}i$ ο ζητούμενος μιγαδικός.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι $D_f=[-3,+\infty)$

$D_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$D_{gof}=\{x\in D_f \ \ \text{και} \ \ f(x)\in D_g\}$

Δηλαδή

$$\left\{\begin{array}{c} x\geq -3 \\ \sqrt{x+3}<0 \ \ \text{ή} \ \ \sqrt{x+3}>0 \end{array}\right\},\ \text{άρα } x>-3$$

Δηλ. $D_{gof}=(-3,+\infty)$ και $(gof)(x)=g(f(x))=1-\frac{2}{f^2(x)}=1-\frac{2}{x+3}$

β. Για κάθε $x_1,x_2\in D_{gof}$ με $(gof)(x_1)=(gof)(x_2)$ έχουμε:

$$1-\frac{2}{x_1+3}=1-\frac{2}{x_2+3}\Leftrightarrow\frac{2}{x_1+3}=\frac{2}{x_2+3}\Leftrightarrow x_1+3=x_2+3\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Οπότε $gof:1-1$ στο $(-3,+\infty)$

γ. $(gof)(|z|)=(gof)(|2z+1|)\overset{gof:1-1}{\Leftrightarrow}|z|=|2z+1|\Leftrightarrow(z=x+yi)$

$$|x+yi|=|2(x+yi)+1|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2x+1)^2+(2y)^2}\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2=4x^2+4x+1+4y^2\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+4x+1=0\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0$$

$$A^2+B^2-4\Gamma=\left(\frac{4}{3}\right)^2-4\frac{1}{3}=\frac{16}{9}-\frac{4}{3}=\frac{16}{9}-\frac{12}{9}=\frac{4}{9}>0$$

Άρα οι εικόνες του z ανήκουν στον κύκλο με κέντρο $K(-\frac{2}{3},0)$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{3}$

δ. Αν $A(z_1)$ και $B(z_2)$ τότε η $|z_1-z_2|$ παριστάνει το μήκος της χορδής ΑΒ του παρακάνω κύκλου, οπότε: $|z_1-z_2|=(AB)\leq 2\rho=\frac{2}{3}$

Δηλ. $|z_1-z_2|_{max}=\frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $D_f = \mathbb{R}$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

Είναι $-x_1 > -x_2$ (1) και $x_1^5 < x_2^5$ οπότε $-x_1^5 > -x_2^5$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη, έχουμε:

$$-x_1 - x_1^5 > -x_2 - x_2^5 \overset{+2}{\Leftrightarrow} 2 - x_1 - x_1^5 > 2 - x_2 - x_2^5 \Leftrightarrow$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται.

β. Θέτουμε $f^{-1}(2) = \kappa$

Τότε $f(f^{-1}(2)) = f(\kappa) \Leftrightarrow 2 = f(\kappa)$

Αλλά $2 = f(0)$ οπότε έχουμε $f(0) = f(\kappa)$ και αφού η f είναι 1 – 1 τότε $x = 0$

Τελικά $f^{-1}(2) = 0$

γ. $f\left(f^{-1}\left(\frac{6-x}{2}\right) - \frac{x}{2}\right) = 2$, άρα $f^{-1}\left(f\left(f^{-1}\left(\frac{6-x}{2}\right) - \frac{x}{2}\right)\right) = f^{-1}(2) \Leftrightarrow$

$$f^{-1}\left(\frac{6-x}{2}\right) - \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{6-x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

Οπότε $f\left(f^{-1}\left(\frac{6-x}{2}\right)\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{6-x}{2} = 2 - \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^5 \Leftrightarrow$

$$3 - \frac{x}{2} = 2 - \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^5 = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow x = -2$$

δ. $f^{-1}(38 - f(x^2 - 5x + 4)) < 0 \overset{f:\text{γν.φθίν.}}{\Leftrightarrow}$

$$f(f^{-1}(38 - f(x^2 - 5x + 4))) > f(0) \Leftrightarrow 38 - f(x^2 - 5x + 4) > 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x^2 - 5x + 4) < 36 \overset{36=f(-2)}{\Leftrightarrow} f(x^2 - 5x + 4) < f(-2) \overset{f:\text{γν.φθίν.}}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 - 5x + 4 > -2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ ή } x>3$$