| | |
|---|---|
| ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ : | ΑΛΓΕΒΡΑ / Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ |
| ΣΕΙΡΑ: | 1η |
| ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: | 11/12/11 |

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

## ΘΕΜΑ 1ο

**Α.** Σχολικό Βιβλίο σελ.67 – Φροντιστηριακό Βιβλίο σελ.290 ερώτηση 3
**Β.** Σχολικό Βιβλίο σελ.62 – Φροντιστηριακό Βιβλίο σελ.259–260 ερώτηση 2–3
**Γ.** **1.** Λ, **2.** Σ, **3.** Σ, **4.** Σ, **5.** Λ

## ΘΕΜΑ 2ο

**Α.** Είναι : $\sigma\upsilon\nu(31\pi+\omega)=\sigma\upsilon\nu(30\pi+\pi+\omega)=\sigma\upsilon\nu(15\cdot 2\pi+\pi+\omega)=\sigma\upsilon\nu(\pi+\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$

$$\eta\mu\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=\eta\mu\left(-2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\varepsilon\varphi(\omega-2\pi)=\varepsilon\varphi[-(2\pi-\omega)]=-\varepsilon\varphi(2\pi-\omega)=-\varepsilon\varphi(-\omega)=\varepsilon\varphi\omega$

$\sigma\varphi(13\pi-\omega)=\sigma\varphi(12\pi+\pi-\omega)=\sigma\varphi(\pi-\omega)=-\sigma\varphi\omega$. Άρα το αρχικό κλάσμα γίνεται:

$$\frac{-\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(\varepsilon\varphi\omega)}{-\sigma\varphi\omega}=-\frac{\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\varepsilon\varphi\omega}{2\cdot\sigma\varphi\omega}=-\frac{\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}{2\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}}=-\frac{\sqrt{3}\cdot\eta\mu^2\omega}{2\cdot\sigma\upsilon\nu\omega}$$

**Β.** **α.** Το $P(x)$ είναι 4ου βαθμού.

**β.** Είναι $P(-1)=2\cdot(-1)^4-3(-1)^2+5(-1)-4=2\cdot1-3\cdot1-5-4=-10$

**γ.** $2P(x)=Q(x)\Leftrightarrow 2(2x^4-3x^2+5x-4)=\alpha x^2(x^2-1)+x(\beta-2x)+\gamma\Leftrightarrow$
$4x^4-6x^2+10x-8=\alpha x^4-\alpha x^2+\beta x-2x^2+\gamma\Leftrightarrow$
$4x^4-6x^2+10x-8=\alpha x^4-(\alpha+2)x^2+\beta x+\gamma$
Επειδή τα πολυώνυμα είναι ίσα, θα έχουν ίσους και τους αντίστοιχους συντελεστές, οπότε: $\alpha=4$, $\beta=10$, $\gamma=-8$.

**δ.** Για $\alpha=4$, $\beta=10$, $\gamma=-8$:

**i)** Είναι $Q(x)=4x^2(x^2-1)+x(10-2x)-8=4x^4-4x^2+10x-2x^2-8$
$=4x^4-6x^2+10x-8$
Σύμφωνα με θεώρημα, είναι $\upsilon=Q(-2)\Leftrightarrow\upsilon=4(-2)^4-6(-2)^2+10(-2)-8\Leftrightarrow$
$\upsilon=4\cdot16-6\cdot4-20-8\Leftrightarrow\upsilon=64-24-28\Leftrightarrow\upsilon=12$

**ii)** Από ευκλείδεια διαίρεση έχουμε :

$$\begin{array}{r|l} 4x^4+0x^3-6x^2+10x-8 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -4x^4\qquad\quad +4x^2 & 4x^2-2 \\ \hline -2x^2+10x-8 & \\ 2x^2\qquad -2 & \\ \hline 10x-10 & \end{array}$$

Άρα $Q(x)=(x^2-1)(4x^2-2)+(10x-10)$

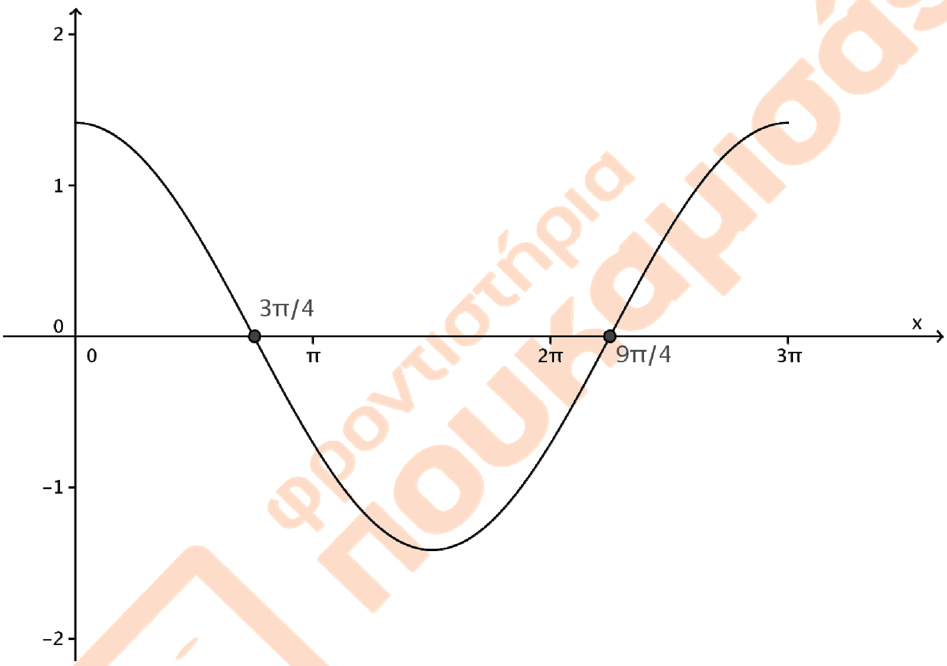
**ΘΕΜΑ 3ο**

**Α.** **α.** Πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ και:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2\pi}{1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3\cdot 2\pi}{2} = 3\pi,\ \text{άρα περίοδος } T = 3\pi$$

**β.** Μέγιστη τιμή: $\sqrt{2}$ και ελάχιστη τιμή: $-\sqrt{2}$

**γ.**




**δ.** $f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2x}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2x}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$

άρα $\frac{2x}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 3\kappa\pi + \frac{3\pi}{8}$ ή $\frac{2x}{3} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 3\kappa\pi - \frac{3\pi}{8},\ \kappa \in \mathbb{Z}$

**Β.** **α.** $\eta\mu 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu\frac{\pi}{4}$

άρα: $2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4}$, ισοδύναμα

$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{8}$ ή $x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{8},\ \kappa \in \mathbb{Z}$

**β.** Περιορισμοί : $x \neq \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ και $x \neq \kappa\pi$ , $\kappa \in \mathbb{Z}$

$\varepsilon\varphi 4x = \sigma\varphi x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 4x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

άρα $4x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow 5x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$

## ΘΕΜΑ 4ο

Το P(x) είναι τρίτου βαθμού και ο διαιρέτης του $x^2 - 4$ είναι δευτέρου, άρα το πηλίκο θα είναι πρώτου βαθμού, δηλαδή είναι $\pi(x) = \alpha x + \beta$

Σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:
$P(x) = (x^2 - 4)(\alpha x + \beta) + x - 8$, **(1)**
Είναι $Q(x) = x^2 + x = x(x+1)$ άρα 0, –1 είναι οι ρίζες του P(x), δηλαδή
$P(0) = 0$ και $P(-1) = 0$
Για $x = 0$ η (1) γίνεται $P(0) = (0^2 - 4)(\alpha\cdot 0 + \beta) + 0 - 8$ ή $0 = -4\beta - 8$ ή $\beta = -2$
Για $x = -1$ η (1) γίνεται
$P(-1) = ((-1)^2 - 4)(\alpha\cdot(-1) + \beta) + (-1) - 8$ ή $0 = -3\cdot(-\alpha - 2) - 9$ ή $3\alpha = 3$ ή $\alpha = 1$

**α.** Άρα $\pi(x) = x - 2$ και $P(x) = (x^2 - 4)(x - 2) + x - 8 = x^3 - 2x^2 - 3x$

**β.** $\upsilon = P\left(-\sqrt{3}\right) = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 2\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 3\left(-\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} - 6 + 3\sqrt{3} = -6$

**γ.** $f(-3) = P(P(-1)) = P(0) = 0$

**δ.** $P(1) = 1 - 2 - 3 = -4$
$P(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 3(-2) = -8 - 8 + 6 = -10$

$$\frac{P(-\sqrt{3})}{2} - P(1)\eta\mu x = (14 + P(-2))\sigma\upsilon\nu^2 x - 4 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{6}{2} + 4\eta\mu x = (14 - 10)\left(1 - \eta\mu^2 x\right) - 4 \Leftrightarrow 4\eta\mu^2 x + 4\eta\mu x - 3 = 0$$

$\eta\mu x = -\frac{3}{2}$ αδύνατη ή $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad (2) \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (3)$$

$$x \in (0,\pi) \Leftrightarrow 0 < 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} < 2\kappa\pi < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} < \kappa < \frac{5}{12}$$

Άρα κ=0 , οπότε από (2) έχουμε: $x = \frac{\pi}{6}$

$$x \in (0,\pi) \Leftrightarrow 0 < 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} < \pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} < 2\kappa\pi < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} < \kappa < \frac{1}{12}$$

Άρα κ=0 , οπότε από (3) έχουμε: $x = \frac{5\pi}{6}$