ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

A_1. Σχολικό βιβλίο Σελ.31

A_2. Σχολικό βιβλίο Σελ.22

Β. **α.** (Σ) , **β.** (Λ) , **γ.** (Σ) , **δ.** (Λ) , **ε.** (Λ)

ΘΕΜΑ 2°

α. Πρέπει $3x^2+2x>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup(0,+\infty)$. Άρα Α=$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup(0,+\infty)$

β. $f'(x)=\left[\ln(3x^2+2x)+\alpha x+\beta\right]'=\left[\ln(3x^2+2x)\right]'+(\alpha x+\beta)'=$

$\frac{1}{3x^2+2x}(3x^2+2x)'+\alpha=\frac{6x+2}{3x^2+2x}+\alpha$

γ. Εφόσον η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1,-1)$, θα ισχύει:

$f(-1)=-1\Leftrightarrow \ln1-\alpha+\beta=-1\Leftrightarrow -\alpha+\beta=-1$ και

$f'(-1)=-1\Leftrightarrow \frac{-6+2}{3-2}+\alpha=-1\Leftrightarrow \alpha=-1+4\Leftrightarrow$ α=3 . Είναι β=–1+α, άρα $\beta=2$

δ. Για α=3: $f'(x)=\frac{6x+2}{3x^2+2x}+3=\frac{6x+2+9x^2+6x}{3x^2+2x}=\frac{9x^2+12x+2}{3x^2+2x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{9x^2+12x+2}{3x^2+2x}=0\Leftrightarrow 9x^2+12x+2=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=12^2-4\cdot9\cdot2=144-72=72>0$, άρα η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα x'x σε δύο σημεία.

ΘΕΜΑ 3°

α. i) Εφόσον η f είναι συνεχής σ'όλο το $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο x=2

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-x+2}{\lambda(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2-1)}{\lambda\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-1)}{\lambda}=\frac{3}{\lambda} \quad \text{και } f(2)=\frac{\lambda}{3}$$

Αφού η f είναι συνεχής στο x=2 θα ισχύει

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \frac{3}{\lambda}=\frac{\lambda}{3}\Leftrightarrow \lambda^2=9\Leftrightarrow \lambda=3$ ή $\lambda=-3$. Όμως $\lambda\in(-\infty,0)$ άρα $\lambda=-3$

ii) Πρέπει $3x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{3}$ και $2-\sqrt{3x+1}\neq 0$. Είναι $\sqrt{3x+1}=2\Leftrightarrow 3x+1=4\Leftrightarrow x=1$

Οπότε $A=\left[-\frac{1}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$

β. $$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2-\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}{\left(2-\sqrt{3x+1}\right)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}{2^2-\left(\sqrt{3x+1}\right)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}{4-3x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}{3(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)\cancel{(x-1)}\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}{-3\cancel{(x-1)}}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}{-3}=\frac{3\cdot 4}{-3}=-4$$

ii) $$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x^2-x+2}{-3(x-2)}=\frac{3^3-2\cdot 3^2-3+2}{-3(3-2)}=-\frac{8}{3}$$

$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-2}{2-\sqrt{3x+1}}=\frac{3^2+3-2}{2-\sqrt{10}}=\frac{10}{2-\sqrt{10}}$$, άρα:

$$\lim_{x\to 3}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to 3} f(x)+\lim_{x\to 3} g(x)=-\frac{8}{3}+\frac{10}{2-\sqrt{10}}=-\frac{8}{3}+\frac{10\left(2+\sqrt{10}\right)}{-6}=$$

$$-\frac{8}{3}-\frac{5\left(2+\sqrt{10}\right)}{3}=\frac{-8-5\left(2+\sqrt{10}\right)}{3}=\frac{-18-5\sqrt{10}}{3}$$

γ. Από βi) έχουμε $\lim_{x\to 1} g(x)=-4$ άρα $\lim_{x\to 1} h(x)=\lim_{x\to 1} g(x)=-4$

Ακόμα $$h(1)=\lim_{t\to 3}\frac{t^2-4t+3}{t^3-27}=\lim_{t\to 3}\frac{\cancel{(t-3)}(t-1)}{\cancel{(t-3)}(t^2+3t+9)}=\lim_{t\to 3}\frac{t-1}{t^2+3t+9}=\frac{3-1}{3^2+3\cdot 3+9}=\frac{2}{27}$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 1} h(x)\neq h(1)$, άρα η h (x) δεν είναι συνεχής στο x=1

ΘΕΜΑ 4º

α. Εφόσον η f τέμνει τον $x'x$ στο $x_0=-1$, θα ισχύει:

$$f(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^3+\kappa\cdot(-1)^2-3+\lambda=0 \Leftrightarrow -1+\kappa-3+\lambda=0 \Leftrightarrow \kappa+\lambda=4$$

Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=3x^2+2\kappa x+3$

Αφού η εξίσωση $f'(x)=3$ έχει λύση την $x=-\frac{2}{3}$, θα ισχύει:

$$f'\left(-\frac{2}{3}\right)=3 \Leftrightarrow 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2+2\kappa\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+3=3 \Leftrightarrow \frac{12}{9}-\frac{4\kappa}{3}=0 \Leftrightarrow \frac{4\kappa}{3}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \kappa=1$$

Επομένως από $\kappa+\lambda=4$ έχουμε $1+\lambda=4 \Leftrightarrow \lambda=3$

β. i) $f''(x)=6x+2$, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f''(x)-14}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{6x+2-14}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{6x-12}{x-2}\lim\limits_{x\to 2}\frac{6\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=6$

ii) $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{\frac{f''(x)-14}{6}}-1}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{\frac{6x+2-14}{6}}-1}{x^2-9}\right)=$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{\frac{6(x-2)}{6}}-1}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-1}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}=\frac{1}{6\cdot 2}=\frac{1}{12}$$

γ. Έχουμε την συνάρτηση $g(x)=e^x\cdot f(x)$ για την οποία

$$g'(x)=\left(e^x f(x)\right)'=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\left(f(x)+f'(x)\right)$$

Άρα $\frac{g'(x)}{e^x}=x^3+3x^2+9x+3 \Leftrightarrow \frac{\cancel{e^x}\left(f(x)+f'(x)\right)}{\cancel{e^x}}=x^3+3x^2+9x+3 \Leftrightarrow$

$$\left[\left(x^3+x^2+3x+3\right)+\left(3x^2+2x+3\right)\right]=x^3+3x^2+9x+3 \Leftrightarrow$$

$$x^3+4x^2+5x+6=x^3+3x^2+9x+3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \text{ με } x=1,\ x=3$$