



ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ / Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΕΙΡΑ:	1 ^η
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	12/02/2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ 1^ο**

A. Σχολικό βιβλίο σελίδα 83

B. i. Σ, ii. Σ, iii. Λ, iv. Σ, v. Λ

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Έστω η ζητούμενη ευθεία. Είναι $\lambda_\epsilon = -\frac{1}{3}$, άρα $\lambda_\eta = 3$, οπότε η: $y = 3x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$

Έχουμε $d(A, \eta) = \sqrt{10}$, άρα $\frac{|3 \cdot 1 + 6 + \beta|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |\beta + 9| = 10$, επομένως: $\beta = 1$, $\beta = -19$

Δηλαδή η: $y = 3x + 1$, ή η: $y = 3x - 19$

β) Το M ανήκει στον γ'γ, άρα $M(0, y_0)$, τότε $\overline{AB} = (4 - 1, -5 + 6) = (3, 1)$ και

$$\overline{AM} = (-1, y_0 + 6). (MAB) = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{AM})| = 5 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & y_0 + 6 \end{vmatrix} = 10 \Leftrightarrow$$

$$|3y_0 + 19| = 10, \text{ άρα } y_0 = -3, y_0 = -\frac{29}{3}, \text{ επομένως } M(0, -3) \text{ ή } M\left(0, -\frac{29}{3}\right)$$

Επειδή $y_M > -5$, το ζητούμενο σημείο M είναι το $M(0, -3)$

γ) Το $M(0, -3)$ είναι σημείο του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$, άρα επαληθεύει την εξίσωσή του,

δηλαδή: $0^2 + (-3)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 9$. Συνεπώς η ζητούμενη εξίσωση είναι: $x^2 + y^2 = 9$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. α) $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$, τότε $\lambda_{AB} = \frac{1}{2}$. Έστω $M(x_0, y_0)$ το μέσον του AB, τότε:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{-2+2}{2} \\ y_0 = \frac{1+3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$





Έτσι $M(0, 2)$ και αφού $\lambda_{AB} = \frac{1}{2}$ θα είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = -2$. Η εξίσωση επομένως της

μεσοκαθέτου ε_1 του AB είναι $y - 2 = -2(x - 0) \Leftrightarrow y = -2x + 2$

β) Το κέντρο K του κύκλου C είναι το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

Λύνουμε επομένως το σύστημα: $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$, οπότε $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = -1 \end{cases}$

Άρα $K(-1, 4)$. Αν ρ η ακτίνα του κύκλου, τότε $C: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = \rho^2$ και $A \in C$,

επομένως $(-2 + 1)^2 + (1 - 4)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 10$ και ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση:

$$C: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$$

Β. α) Αν K, Λ τα κέντρα των $C_1: (x - 2)^2 + y^2 = 9$ και $C_2: x^2 + y^2 - 10x - 8y + 37 = 0$

αντίστοιχα, τότε $K(2, 0)$ και $\Lambda(5, 4)$, ενώ οι ακτίνες των κύκλων είναι $\rho_1 = 3$ του C_1

και $\rho_2 = 2$ του C_2 . Είναι $K\Lambda = \sqrt{(5 - 2)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{25} = 5 = \rho_1 + \rho_2$, δηλαδή οι

κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β) Έστω Σ το σημείο επαφής των παραπάνω κύκλων. Τότε η ζητούμενη κοινή εφαπτομένη ευθεία ε των κύκλων η οποία διέρχεται από αυτό προκύπτει από την αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων των δύο κύκλων.

Έτσι έχουμε: $(x^2 + y^2 - 4x - 5) - (x^2 + y^2 - 10x - 8y + 37) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 21 = 0$,

άρα $\varepsilon: 3x + 4y - 21 = 0$ (Σε αυτήν ανήκει το σημείο τομής Σ των κύκλων και έχει

$\lambda_\varepsilon = -\frac{3}{4}$ ενώ είναι $\lambda_{K\Lambda} = \frac{4}{3}$, δηλαδή $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{K\Lambda} = -1$, άρα $\varepsilon \perp K\Lambda$)

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Είναι $x^2 + y^2 - 2\mu x + 4\mu y + \mu^2 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, άρα $A = -2\mu$, $B = 4\mu$, $\Gamma = \mu^2$

Έχουμε $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4\mu^2 + 16\mu^2 - 4\mu^2 = 16\mu^2 > 0$ για κάθε $\mu \neq 0$, άρα η (1) παριστάνει

κύκλο για κάθε $\mu \neq 0$. Το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ ή $K(\mu, -2\mu)$ και η ακτίνα

$$\text{του } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{16\mu^2}}{2} = 2|\mu|, \mu \neq 0$$





β) Έστω $K(x, y)$, τότε επειδή $K(\mu, -2\mu)$, θα έχουμε $\begin{cases} x = \mu \\ y = -2\mu \end{cases}$, άρα $y = -2x$,

συνεπώς τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην ευθεία $2x + y = 0$ εκτός από το σημείο $O(0, 0)$ αφού $\mu \neq 0$

γ) Για $\mu=2$ ο κύκλος C έχει εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$, ισοδύναμα:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 = 16 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4^2, \text{ οπότε το κέντρο του είναι}$$

$K(2, -4)$ και η ακτίνα του $\rho=4$

i) Αν $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτομένης ε του κύκλου στο σημείο

$$\text{του } \Sigma\left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right), \text{ τότε: } \overline{K\Sigma} \cdot \overline{\Sigma M} = 0 \text{ με } \overline{K\Sigma} = \left(-\frac{6}{5} - 2, -\frac{8}{5} + 4\right) = \left(-\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

$$\text{και } \overline{\Sigma M} = \left(x + \frac{6}{5}, y + \frac{8}{5}\right). \text{ Επομένως: } \left(-\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right) \cdot \left(x + \frac{6}{5}, y + \frac{8}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{16}{5}\left(x + \frac{6}{5}\right) + \frac{12}{5}\left(y + \frac{8}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow -4\left(x + \frac{6}{5}\right) + 3\left(y + \frac{8}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y = 0 \text{ η οποία}$$

είναι και η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης.

ii) Είναι $d(K, y'y) = |x_K| = K\Gamma = 2 < \rho$, άρα ο άξονας $y'y$ τέμνει τον κύκλο στα σημεία

K_1, K_2 δηλαδή κατά χορδή K_1K_2 . Στο τρίγωνο $K\Gamma K_1$ εφαρμόζουμε Π.Θ. και έχουμε:

$$(\Gamma K_1)^2 = \rho^2 - (K\Gamma)^2 = 16 - 4 = 12, \text{ άρα } \Gamma K_1 = 2\sqrt{3}, \text{ συνεπώς το ζητούμενο μήκος}$$

$$\text{της χορδής είναι } (K_1K_2) = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3},$$

