



ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΕΙΡΑ:	1 <sup>η</sup> ΘΕΡΙΝΑ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	28/12/2011

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

A<sub>1</sub>. Θεωρία σελ. 194 από το σχολικό

A<sub>2</sub>. Θεωρία σελ. 213 από το σχολικό

A<sub>3</sub>. Θεωρία σελ. 222 από το σχολικό

B. α. Σ, β. Λ, γ. Σ, δ. Λ, ε. Σ

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

$$\alpha. |(1-i)z-2|=2 \Leftrightarrow |1-i| \cdot \left| z - \frac{2}{1-i} \right| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \left| z - \frac{2(1+i)}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow |z-(1+i)| = \sqrt{2}$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  είναι κύκλος  $C$  με κέντρο  $K(1,1)$  και ακτίνα  $\rho = \sqrt{2}$

$$\beta. \left| \frac{w+2i}{w-2+4i} \right| = 1 \Leftrightarrow |w+2i| = |w-2+4i| \Leftrightarrow$$

$$|w+2i|^2 = |w-2+4i|^2 \Leftrightarrow (w+2i)(\bar{w}-2i) = (w-2+4i)(\bar{w}-2-4i) \Leftrightarrow$$

$$w\bar{w} - 2wi + 2\bar{w}i + 4 = w\bar{w} - 2w - 4wi - 2\bar{w} + 4 + 8i + 4\bar{w}i - 8i + 16 \Leftrightarrow$$

$$2wi - 2\bar{w}i + 2w + 2\bar{w} - 16 = 0 \Leftrightarrow 2(w - \bar{w})i + 2(w + \bar{w}) - 16 = 0$$

Έστω  $w = x + yi$  με  $x \neq 2$  και  $y \neq -4$ . Τότε  $w - \bar{w} = 2yi$ ,  $w + \bar{w} = 2x$

$$\text{Οπότε έχουμε: } 2 \cdot 2yi \cdot i + 2 \cdot 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $w$  είναι ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση  $x - y - 4 = 0$

$$\gamma. |w|_{\min} = d(O, \varepsilon) = \frac{|0-0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad (\text{αφού για κάθε } M \in \varepsilon : OM = |w| \geq d(O, \varepsilon))$$

$$\delta. d(K, \varepsilon) = \frac{|1-1-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > \rho$$





$$\text{Επομένως } |z - w|_{\min} = d(K, \varepsilon) - \rho = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$(\text{αφού για κάθε } M \in \varepsilon \text{ και } N \in \mathbb{C} : d(K, \varepsilon) - \rho \leq NM = |z - w|)$$

### ΘΕΜΑ 3°

$$\alpha. \text{ Για } x > 0 \text{ έχουμε } \frac{\eta\mu^2x}{x} - \frac{x^3}{x} \leq f(x) \leq \frac{\eta\mu^2x}{x} + \frac{x^3}{x} \Leftrightarrow \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} - x^2 \leq f(x) \leq \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + x^2$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\eta\mu^2x}{x} - x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\eta\mu^2x}{x} + x^2 \right) = 0$$

$$\text{Από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\text{Αλλά } f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}, \text{ οπότε } f \text{ συνεχής στο } 0, \text{ δηλ.: } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\beta. \text{ Ζητάμε το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{Για } x \neq 0, \text{ έχουμε: } \frac{\eta\mu^2x}{x^2} - x \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\eta\mu^2x}{x^2} + x$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta\mu^2x}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 - x \right] = 1 - 0 = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta\mu^2x}{x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 + x \right] = 1 + 0 = 1$$

$$\text{Από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ δηλ. } f'(0) = 1$$

Άρα η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $O(0,0)$  έχει εξίσωση:

$$\varepsilon : y - f(0) = f'(0)(x - 0) \text{ δηλαδή } \varepsilon : y = x$$

$$\gamma. \text{ Θέλουμε η εξίσωση } g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) - x + 1 - x = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2x + 1 = 0$$

να έχει μία τουλάχιστον λύση στο  $(0,2)$ . Θέτουμε  $\varphi(x) = f(x) - 2x + 1, x \in [0,2]$

Είναι  $\varphi$  συνεχής στο  $[0,2]$  ως πράξεις συνεχών

$$\varphi(0) = f(0) - 2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0, \quad \varphi(2) = f(2) - 2 \cdot 2 + 1 = f(2) - 3$$





Από (Υ)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{2-x} = 1$ . Θέτουμε  $t(x) = \frac{f(x)}{2-x}, x \neq 2$

Οπότε  $f(x) = (2-x) \cdot t(x)$  με  $\lim_{x \rightarrow 2} t(x) = 1$ , άρα  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [(2-x)t(x)] = 0 \cdot 1 = 0$

Και αφού  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , τότε  $f(2) = 0$ , δηλ.  $\varphi(2) = f(2) - 3 = -3 < 0$

Τελικά  $\varphi(0) \cdot \varphi(2) = 1 \cdot (-3) = -3 < 0$ , οπότε από θεώρημα Bolzano

υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 2)$ , ώστε  $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = x_0$

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+3}{x^2-4} = \frac{1}{2}$ . Θεωρούμε  $g(x) = \frac{f(x)+3}{x^2-4}$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{1}{2}$  και  $f(x) = g(x) \cdot (x^2-4) - 3$

Οπότε  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [g(x) \cdot (x^2-4) - 3] = \frac{1}{2} \cdot 0 - 3 = -3$

$f$  συνεχής στο  $2 \in [0, 8]$  επομένως  $f(2) = -3$

Η  $y = 4x - 12$  εφάπτεται της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $x_0 = 3$ ,

οπότε  $f$  παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 3$  και ισχύει:  $f'(3) = 4$  και  $f(3) = 4 \cdot 3 - 12 \Leftrightarrow f(3) = 0$

$f(2) \cdot f(4) \cdot f(1) = 60 \Leftrightarrow f(4) \cdot f(1) = -20$

α. i)  $f(3) = 0$ , επομένως η  $f(x) = 0$  έχει ρίζα την  $x = 3$  μοναδική αφού  $f' \neq 0$

ii)  $f(x) \neq 0$  και συνεχής στο  $[0, 3)$ , επομένως η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο  $[0, 3)$

$2 \in [0, 3), f(2) < 0$  άρα  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in [0, 3)$

$1 \in [0, 3)$  οπότε  $f(1) < 0$  επομένως  $f(4) > 0$

$f(x) \neq 0$  και συνεχής στο  $(3, 8]$ , επομένως η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο  $(3, 8]$

$4 \in (3, 8], f(4) > 0$ , άρα  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in (3, 8]$

β.  $f$  συνεχής  $[2, 3], f(2) \neq f(3)$

-2 είναι μεταξύ των  $f(2), f(3)$  επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα

Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει  $\xi \in (2, 3)$  ώστε  $f(\xi) = -2$ , δηλαδή η  $C_f$  τέμνει την

$y = -2$  σ' ένα ακριβώς σημείο ( $f$  1-1) με τετμημένη στο  $(2, 3)$ .

γ. Θεωρούμε  $K(x) = f(x) + x - f'(3) \Leftrightarrow K(x) = f(x) + x - 4$





$K$  συνεχής  $[1, 4]$  ως άθροισμα συνεχών

$$K(1) = f(1) + 1 - 4 = f(1) - 3 < 0 \text{ (αφού } f(1) < 0), K(4) = f(4) + 4 - 4 = f(4) > 0$$

$K(1) \cdot K(4) < 0$ . Ισχύουν για την  $K$  οι υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο  $[1, 4]$ , επομένως υπάρχει  $x_1 \in (1, 4)$ , ώστε  $K(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) + x_1 = f'(3)$

δ.  $f$  συνεχής στο  $[0, 8]$ , οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης ελάχιστης

τιμής υπάρχει  $x_2 \in [0, 8]$  ώστε  $f(x) \geq f(x_2)$  για κάθε  $x \in [0, 8]$ .

Επειδή  $f(x) > 0$  για  $x \in (3, 8]$ ,  $f(3) = 0$  και  $f(x) < 0$  για  $x \in [0, 3)$ , είναι  $f(x_2) < 0$ .

Άρα  $x_2 \in [0, 3)$ . Συνεπώς υπάρχει  $x_2 \in [0, 3)$ , ώστε  $f(x) \geq f(x_2)$  για  $x \in [0, 8]$ .

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(2)x^{2012} + 5x^{2011} - 7}{f(6)x^{1961} + x^{28} + 4x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(2)}{f(6)} \cdot x^{51} \right) = +\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{51} = -\infty,$$

$$f(2) < 0 \text{ και } f(6) > 0$$

