ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΣΕΙΡΑ:	**ΧΕΙΜΕΡΙΝΑ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	**28/12/2011**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^o

A$_1$. Θεωρία σελ. 167 από το σχολικό.

A$_2$. Θεωρία σελ. 188 από το σχολικό

A$_3$. Θεωρία σελ. 149 από το σχολικό

B. **α.** Λ, **β.** Σ, **γ.** Σ, **δ.** Σ, **ε.** Λ

ΘΕΜΑ 2^o

α. $|z-1-4i|=2 \Leftrightarrow |z-(1+4i)|=2$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος C με κέντρο $K(1,4)$ και ακτίνα $\rho=2$

β. $|w+2|=|w-2+8i| \Leftrightarrow |w+2|^2=|w-2+8i|^2 \Leftrightarrow$

$(w+2)(\bar{w}+2)=(w-2+8i)(\bar{w}-2-8i) \Leftrightarrow$

$w\bar{w}+2w+2\bar{w}+4=w\bar{w}-2w-8wi-2\bar{w}+4+16i+8\bar{w}i-16i+64 \Leftrightarrow$

$4w+4\bar{w}+8wi-8\bar{w}i-64=0 \Leftrightarrow 4(w+\bar{w})+8(w-\bar{w})i-64=0$

Έστω $w=x+yi$, τότε $w+\bar{w}=2x, w-\bar{w}=2yi$

Οπότε έχουμε: $4\cdot 2x+8\cdot 2yi\cdot i-64=0 \Leftrightarrow x-2y-8=0$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι ευθεία ε με εξίσωση $x-2y-8=0$

γ. $|w|_{min}=d(O,\varepsilon)=\dfrac{|0-2\cdot 0-8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ (αφού για κάθε $M\in\varepsilon: OM=|w|\geq d(O,\varepsilon)$)

δ. $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|1-2\cdot 4-8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}>\rho$. Επομένως $|z-w|_{min}=d(K,\varepsilon)-\rho=3\sqrt{5}-2$

(αφού για κάθε $M\in\varepsilon$ και $N\in C: d(K,\varepsilon)-\rho\leq NM=|z-w|$)

ΘΕΜΑ 3°

α. Θέτουμε $\dfrac{g(x)-1}{x^2-4x}=\varphi(x), x\neq 0,4$, τότε $g(x)=(x^2-4x)\cdot\varphi(x)+1$ με $\lim\limits_{x\to 4}\varphi(x)=2$

Άρα $\lim\limits_{x\to 4}g(x)=\lim\limits_{x\to 4}\left[(x^2-4x)\cdot\varphi(x)+1\right]=0\cdot 2+1=1$

β. • $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{g(x)(x-4)}{\sqrt{x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{g(x)(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{\sqrt{x+5}^2-3^2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{g(x)(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}=1\cdot 6=6$

• $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3g(x)(x^2-6x+8)}{\eta\mu(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3g(x)(x-2)(x-4)}{\eta\mu(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3g(x)(x-2)}{\dfrac{\eta\mu(x-4)}{x-4}}=\dfrac{3\cdot 1\cdot(4-2)}{1}=6$

Αφού $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\eta\mu(x-4)}{x-4}\overset{u=x-4}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=6$

γ. i) $\lim\limits_{x\to 4}h(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{|g(x)-1|}=\lim\limits_{x\to 4}\left[(5x+2)\cdot\dfrac{1}{|g(x)-1|}\right]=+\infty$

Αφού • $\lim\limits_{x\to 4}(5x+2)=22>0$ • $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4}|g(x)-1|=|1-1|=0\\ |g(x)-1|\geq 0\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{|g(x)-1|}=+\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{h^2(x)+2h(x)+3}-h(x)\right)=$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{h^2(x)+2h(x)+3}^2-h^2(x)}{\sqrt{h^2(x)+2h(x)+3}+h(x)}=\lim_{x\to 4}\frac{h^2(x)+2h(x)+3-h^2(x)}{\sqrt{h^2(x)\left(1+\dfrac{2}{h(x)}+\dfrac{3}{h^2(x)}\right)}+h(x)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{2h(x)+3}{|h(x)|\sqrt{2+\dfrac{2}{h(x)}+\dfrac{3}{h^2(x)}}+h(x)}\overset{h(x)>0}{=}\lim_{x\to 4}\frac{2h(x)+3}{h(x)\sqrt{1+\dfrac{2}{h(x)}+\dfrac{3}{h^2(x)}}+h(x)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{h(x)\left(2+\dfrac{3}{h(x)}\right)}{h(x)\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{h(x)}+\dfrac{3}{h^2(x)}}+1\right)}=\frac{2}{2}=1$$

ΘΕΜΑ 4°

α. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x_0)=0$. Για $x=x_0$ η (Υ) μας δίνει:

$f^2(x_0)=x_0^{\,2}-7x_0+16 \Leftrightarrow x_0^{\,2}-7x_0+16=0$ αδύνατον (αφού $\Delta=-15<0$)

Άρα $f(x)\neq 0, x\in\mathbb{R}$

β. i) Αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0, x\in\mathbb{R}$ τότε η f θα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$, δηλ. $f(x)>0, x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)<0, x\in\mathbb{R}$, δηλ. $f(x)=\sqrt{x^2-7x+16}, x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-\sqrt{x^2-7x+16}, x\in\mathbb{R}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2+f(x)}{x-3}=-2$. Θέτουμε $\dfrac{2+f(x)}{x-3}=g(x),\ x\neq 3$

Τότε $f(x)=(x-3)g(x)-2$ με $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=-2$

Άρα $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left[(x-3)g(x)-2\right]=0\cdot(-2)-2=-2$ και αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$,

Τότε $f(3)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)=-2<0$, οπότε $f(x)<0, x\in\mathbb{R}$, δηλ. $f(x)=-\sqrt{x^2-7x+16}, x\in\mathbb{R}$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-7x+16})=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\sqrt{x^2-7x+16}^{\,2}}{x+\sqrt{x^2-7x+16}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+7x-16}{x+\sqrt{x^2(1-\frac{7}{x}+\frac{16}{x^2})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x-16}{x+|x|\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{16}{x^2}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(7-\frac{16}{x})}{x(1+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{16}{x^2}})}=\frac{7}{2},\qquad |x|=x \text{ αφού } x>0$$

iii) Αν $\dfrac{f^2(x)-2ax}{x-4}=h(x),\ x\neq 4$, τότε $f^2(x)-2ax=(x-4)h(x)$

Δηλαδή $x^2-7x+16-2ax=(x-4)h(x)$ με $\lim\limits_{x\to 4}h(x)=\lambda\in\mathbb{R}$

Άρα $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-7x+16-2ax)=\lim\limits_{x\to 4}\left[(x-4)h(x)\right]=0\cdot l=0$

Δηλαδή $4^2-7\cdot 4+16-2a\cdot 4=0\Leftrightarrow 4-8a=0\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$. Για $a=\dfrac{1}{2}$

έχουμε:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f^2(x)-2ax}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7x+16-x}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^2}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x-4)=0$$