ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΣΕΙΡΑ:	**$1^η$**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	**08/01/2012**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^o

Α. **α.** Σχολικό βιβλίο. Σελ.65
β. Σχολικό βιβλίο. Σελ.65
Β. **α.** Σχολικό βιβλίο. Σελ.58 **β, γ.** Σχολικό βιβλίο. Σελ.59
Γ. **α.** Λ , **β.** Σ, **γ.** Λ, **δ.** Σ, **ε.** Λ

ΘΕΜΑ 2°

Α. Έχουμε $f'(x) = -3x^2 - 12x - 9$ και $f'(x) = 0$ με $x = -1,\ x = -3$

Ο πίνακας προσήμου της $f'(x)$ και μεταβολών της $f(x)$ είναι:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	

Μονοτονία
Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty,-3]$ και στο $[-1,+\infty)$ και γν. αύξουσα στο $[-3,-1]$

Β. **i)** Απο προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x=-3
το $f(-3) = -(-3)^3 - 6(-3)^2 - 9(-3) + 10 = 27 - 54 + 27 + 10 = 10$, άρα α=$f(-3) = 10$
και Τ. Μ στο x=-1, το $f(-1) = -(-1)^3 - 6(-1)^2 - 9(-1) + 10 = 1 - 6 + 9 + 10 = 14$,
άρα β=14, $f'(x) = -3x^2 - 12x - 9$ και $f''(x) = -6x - 12$

οπότε: $\gamma = \lim\limits_{x\to-6} \dfrac{f'(x) + f''(x) - 3(x-1)}{3x+18} = \lim\limits_{x\to-6} \dfrac{-3x^2 - 12x - 9 - 6x - 12 - 3x + 3}{3(x+6)} =$

$$\lim_{x\to-6} \frac{-3x^2 - 21x - 18}{3(x+6)} = \lim_{x\to-6} \frac{-3\left(x^2 + 7x + 6\right)}{3(x+6)} =$$

$$\lim_{x\to-6}\frac{-3(x+1)\cancel{(x+6)}}{3\cancel{(x+6)}}=\lim_{x\to-6}(-x-1)=6-1=5$$

ii)

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
1	4	10	4	10
2	10	25	14	35
3	16	40	30	75
4	2	5	32	80
5	8	20	40	100
Σύνολο	40	100	–	–

$f_4=\frac{v_4}{v}\Leftrightarrow 0{,}05=\frac{2}{v}\Leftrightarrow v=\frac{2}{0{,}05}\Leftrightarrow v=40$,

$N_2=14=v_1+v_2$, άρα $v_1=14-10=4$

$f_1=\frac{v_1}{v}=\frac{4}{40}=0{,}1$ ή 10%, $N_1=v_1=4$, $F_1\%=f_1\%=10\%$

$f_2=\frac{v_2}{v}=\frac{10}{40}=0{,}25$ ή 25% , $F_2\%=F_1\%+f_2\%=10\%+25\%=35\%$,

$f_3\%=F_3\%-F_2\%=75\%-35\%=40\%$, $f_3=\frac{v_3}{v}\Leftrightarrow 0{,}4=\frac{v_3}{40}\Leftrightarrow v_3=16$,

$N_3=N_2+v_3=14+16=30$, $N_4=N_3+v_4=30+2=32$,

$F_4\%=F_3\%+f_4\%=75\%+5\%=80\%$, $N_4+v_5=v\Leftrightarrow v_5=40-32=8$,

$f_5=\frac{v_5}{v}=\frac{8}{40}=0{,}2$ ή 20% , $N_5=v=40$

<u>ΘΕΜΑ 3°</u>

A. $f'(x)=\left[\ln\left(\frac{x^2+\alpha^2}{4}\right)\right]'=\frac{1}{\frac{x^2+\alpha^2}{4}}\left(\frac{x^2+\alpha^2}{4}\right)'=\frac{4}{x^2+\alpha^2}\cdot\frac{1}{4}\left(x^2+\alpha^2\right)'=$

$\frac{1}{x^2+\alpha^2}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+\alpha^2}$, $f'(x)\le\frac{1}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{2x}{x^2+\alpha^2}\le\frac{1}{\alpha}\Leftrightarrow x^2+\alpha^2\ge 2\alpha x\Leftrightarrow$

$x^2+\alpha^2-2\alpha x\ge 0\Leftrightarrow(x-\alpha)^2\ge 0$ που ισχύει.

B. i) $f(0)=0\Leftrightarrow\ln\left(\frac{0^2+\alpha^2}{4}\right)=0\Leftrightarrow\ln\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)=\ln 1\Leftrightarrow\frac{\alpha^2}{4}=1\Leftrightarrow\alpha^2=4\Leftrightarrow\alpha=\pm 2$,

όμως α>0, άρα δεκτή μόνο η α=2

ii) Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Εφόσον η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την ευθεία $x-2y-6=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-3$, θα ισχύει:

$$f'(x_0)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x_0}{x_0^2+4}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0^2+4=4x_0 \Leftrightarrow x_0^2-4x_0+4=0 \Leftrightarrow$$

$(x_0-2)^2=0 \Leftrightarrow x_0=2$, $f(2)=\ln 2$, άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=\frac{1}{2}x+\beta$. Το σημείο επαφής την επαληθεύει,

άρα $f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2+\beta \Leftrightarrow \ln 2=1+\beta \Leftrightarrow \beta=-1+\ln 2$ άρα $y=\frac{1}{2}x-1+\ln 2$

iii) $$f''(x)=\left(\frac{2x}{x^2+4}\right)'=\frac{(2x)'(x^2+4)-2x(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}=$$

$$\frac{2(x^2+4)-2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{2x^2+8-4x^2}{(x^2+4)^2}=$$

$$\frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{2(4-x^2)}{(x^2+4)^2},\ f''(x)=0 \Leftrightarrow 4-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$$

Ο πίνακας προσήμου της $f''(x)$ και μεταβολών της $f'(x)$ είναι:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		↘		↗		↘	
			ΕΛΑΧ.		ΜΕΓ.		

Η f΄ είναι γν. Φθίνουσα στο $(-\infty,-2]$ και στο $[2,+\infty)$ και γν. αύξουσα στο $[-2,2]$

Γ. i) $f'(1)=\frac{2}{1+4}=\frac{2}{5}=0{,}4$ $f'(6)=\frac{2\cdot 6}{36+4}=\frac{12}{40}=0{,}3$

$F_3=F_2+f_3=0{,}50, F_3=\frac{N_3}{v} \Leftrightarrow 0{,}50=\frac{20}{v} \Leftrightarrow v=40$

$f_1=\frac{v_1}{v} \Leftrightarrow 0{,}30=\frac{v_1}{40} \Leftrightarrow v_1=12, N_1=v_1=12$ και $F_1=f_1=0{,}30$

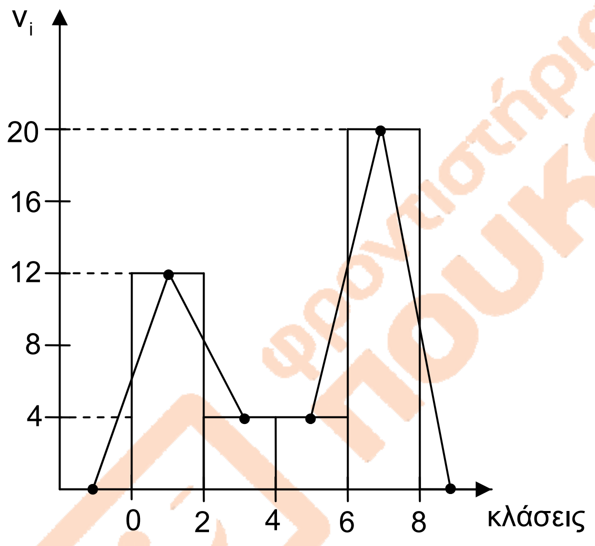
$$F_2 = F_1 + f_2 \Leftrightarrow f_2 = 0,40 - 0,30 = 0,10,\ f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow 0,10 = \frac{v_2}{40} \Leftrightarrow v_2 = 4$$

$$N_2 = N_1 + v_2 = 12 + 4 = 16,\ v_3 = N_3 - N_2 = 20 - 16 = 4$$

$$N_3 + v_4 = v \Leftrightarrow v_4 = 20,\ \text{τότε}\ \ f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{20}{40} = 0,50,\ N_4 = v = 40$$

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
[0, 2)	1	12	0,30	12	0,30
[2, 4)	3	4	0,10	16	0,40
[4, 6)	5	4	0,10	20	0,50
[6, 8)	7	20	0,50	40	1
Σύνολο		40	1	–	–

ii) <u>ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΓΩΝΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ</u>



<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Α. $f'(x) = 3x^2 + 2\kappa x + \lambda$

Εφόσον η εφαπτομένη της f στο $A(2, f(2))$ είναι η $y = -3x + 16$ θα ισχύει:

$f'(2) = -3 \Leftrightarrow 3 \cdot 4 + 4\kappa + \lambda = -3 \Leftrightarrow 4\kappa + \lambda = -15$ και

$f(2) = -3 \cdot 2 + 16 \Leftrightarrow 2^3 + 2^2\kappa + 2\lambda + 8 = 10 \Leftrightarrow 8 + 4\kappa + 2\lambda + 8 = 10 \Leftrightarrow$

$4\kappa + 2\lambda = -6 \Leftrightarrow 2\kappa + \lambda = -3$

Από επίλυση του συστήματος $\kappa = -6$ και $\lambda = 9$

Β. **α.** $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ x = 3$

Ο πίνακας προσήμου της $f'(x)$ και μεταβολών της $f(x)$ είναι:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Μ.		Τ.Ε		

Η f παρουσιάζει Τ.Μ στο x=1, το $M=f(1)=1^3-6\cdot1^2+9\cdot1+8=1-6+9+8=12$

και Τ.Ε στο x=3, το $\mu=f(3)=3^3-6\cdot3^2+9\cdot3+8=27-54+27+8=8$

Άρα, μ=8 και Μ=12

β. Στο παραπάνω σχήμα μας δίνεται το πολύγωνο των συχνοτήτων, το οποίο γνωρίζουμε ότι για να το δημιουργήσουμε βρίσκουμε το μέσο της κάθε κλάσης. Αν οι κλάσεις είναι της μορφής: [α, α+c), [α+c, α+2c), [α+2c, α+3c), [α+3c, α+4c), τότε:

$$\frac{\alpha+c+\alpha+2c}{2}=10 \Leftrightarrow \frac{2\alpha+3c}{2}=10 \Leftrightarrow 2\alpha+3c=20$$

και $\dfrac{\alpha+3c+\alpha+4c}{2}=18 \Leftrightarrow \dfrac{2\alpha+7c}{2}=18 \Leftrightarrow 2\alpha+7c=36$

Από την επίλυση του συστήματος προκύπτει α=4 και c=4

Άρα οι κλάσεις είναι οι [4,8), [8,12), [12,16), [16,20)

γ. i) $f_2=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f'(x)}{40\left(x^2-5x+6\right)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-12x+9}{40\left(x^2-5x+6\right)}=$

$$\lim_{x\to3}\frac{3\left(x^2-4x+3\right)}{40\left(x^2-5x+6\right)}=\lim_{x\to3}\frac{3(x-1)\cancel{(x-3)}}{40\cancel{(x-3)}(x-2)}=$$

$$\lim_{x\to3}\frac{3(x-1)}{40(x-2)}=\frac{3(3-1)}{40(3-2)}=\frac{6}{40}=0{,}15$$

ii) $f_1+f_2+f_3+f_4=1 \Leftrightarrow \dfrac{8}{v}+0{,}15+\dfrac{14}{v}+\dfrac{12}{v}=1 \Leftrightarrow \dfrac{34}{v}=1-0{,}15$

$$\Leftrightarrow \frac{34}{v}=0{,}85 \Leftrightarrow v=40,\ f_2=\frac{v_2}{v} \Leftrightarrow v_2=f_2\cdot v \Leftrightarrow v_2=0{,}15\cdot40 \Leftrightarrow v_2=6$$

iii) $f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{8}{40} = 0{,}2,\ f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{14}{40} = 0{,}35,\ f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{12}{40} = 0{,}3$

Άρα

Κλάσεις	v_i	f_i	$f_i\%$
[4,8)	8	0,2	20
[8,12)	6	0,15	15
[12,16)	14	0,35	35
[16,20)	12	0,3	30
Σύνολο	40	1	100

Τότε: το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο [5, 14] είναι:
$\frac{3}{4}v_1 + v_2 + \frac{1}{2}v_3 = \frac{3}{4}\cdot 8 + 6 + \frac{1}{2}\cdot 14 = 19$ παρατηρήσεις και το αντίστοιχο ποσοστό είναι:

$\frac{3}{4}f_1\% + f_2\% + \frac{1}{2}f_3\% = \frac{3}{4}\cdot 20\% + 15\% + \frac{1}{2}\cdot 35\% = 47{,}5\%$