ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (1η σειρά)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο. Σελ.31

Β. Σχολικό βιβλίο. Σελ.22

Γ. **α.** (Σ) , **β.** (Λ) , **γ.** (Λ) , **δ.** (Σ) , **ε.** (Λ)

ΘΕΜΑ 2°

α. Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=2x+\alpha$, άρα

$$f(1)+f'(1)=-1 \Leftrightarrow 1+\alpha+10+(2+\alpha)=-1 \Leftrightarrow 2\alpha+13=-1 \Leftrightarrow 2\alpha=-14 \Leftrightarrow \alpha=-7$$

β. Για $\alpha=-7$ έχουμε $f'(x)=2x-7$ και $f''(x)=2$

$$\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{2f'(x)-3f''(x)}=\lim_{x\to5}\frac{x^2-7x+10}{2(2x-7)-3\cdot2}=\lim_{x\to5}\frac{x^2-7x+10}{4x-14-6}$$

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-7x+10}{4x-20}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x-2)}{4(x-5)}=\lim_{x\to5}\frac{x-2}{4}=\frac{3}{4}$$

γ. **i)** Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(3,f(3))$ έχει τη μορφή $y=f'(3)x+\beta$. Όμως $f'(3)=2\cdot3-7=-1$ και $f(3)=3^2-7\cdot3+10=-2$, άρα η εξίσωση γίνεται $y=-x+\beta$

Το σημείο $M(3,f(3))$ ανήκει στην εφαπτομένη, άρα την επαληθεύει, οπότε:

$f(3)=-3+\beta \Leftrightarrow -2=-3+\beta \Leftrightarrow \beta=1$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης της f είναι $y=-x+1$

ii) Έστω $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής .Εφόσον η εφαπτομένη της f είναι παράλληλη στην ευθεία $y=5x+2011$ θα ισχύει $f'(x_0)=5 \Leftrightarrow 2x_0-7=5 \Leftrightarrow 2x_0=12 \Leftrightarrow x_0=6$. Τότε

$f(6)=6^2-7\cdot6+10=36-42+10=4$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=5x+2011$ έχει τη μορφή $y=f'(6)x+\beta \Leftrightarrow y=5x+\beta$. Το σημείο $A(6,f(6))$ ανήκει στην εφαπτομένη, άρα την επαληθεύει, οπότε:

$f(6)=5\cdot 6+\beta \Leftrightarrow 4=30+\beta \Leftrightarrow \beta=-26$ και άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης της f είναι $y=5x-26$

ΘΕΜΑ 3°

α. Πρέπει $x^2-x-2\neq 0$ άρα $x\neq 2$ και $x\neq -1$. Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το

$A=\mathbb{R}-\{-1,2\}$

β. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+\lambda x}{x^2-x-2}+\dfrac{1}{3}\alpha\right)'=\left(\dfrac{x^2+\lambda x}{x^2-x-2}\right)'+\left(\dfrac{1}{3}\alpha\right)'=$

$$\frac{(x^2+\lambda x)'(x^2-x-2)-(x^2+\lambda x)(x^2-x-2)'}{(x^2-x-2)^2}=$$

$$\frac{(2x+\lambda)(x^2-x-2)-(x^2+\lambda x)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}=$$

$$\frac{\cancel{2x^3}-2x^2-4x+\lambda x^2-\cancel{\lambda x}-2\lambda-\cancel{2x^3}+x^2-2\lambda x^2+\cancel{\lambda x}}{(x^2-x-2)^2}=$$

$$\frac{(-\lambda-1)x^2-4x-2\lambda}{(x^2-x-2)^2}=-\frac{\left[(\lambda+1)x^2+4x+2\lambda\right]}{(x^2-x-2)^2}$$

γ. i) Για να έχει δύο ακρότατα πρέπει η παράγωγος της f να έχει δύο ρίζες άνισες.

Δηλαδή πρέπει $\lambda+1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq -1$

και $\Delta>0 \Leftrightarrow 16-4\cdot 2\lambda\cdot(\lambda+1)>0 \Leftrightarrow -8\lambda^2-8\lambda+16>0 \Leftrightarrow -\lambda^2-\lambda+2>0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2+\lambda-2<0$, άρα λύνουμε την εξίσωση $\lambda^2+\lambda-2=0$ που δίνει $\lambda=1$ ή $\lambda=-2$

Από πίνακα προσήμων προκύπτει $\lambda\in(-2,-1)\cup(-1,1)$

ii) Για να έχει ένα ακρότατο πρέπει να είναι 1^{ου} βαθμού, δηλαδή $\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$

δ. i) Για $\lambda=-1$ η παράγωγος της f είναι $f'(x)=-\dfrac{4x-2}{(x^2-x-2)^2}$

Για να βρούμε το ακρότατο πρέπει $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{4x-2}{(x^2-x-2)^2}=0 \Leftrightarrow 4x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x=\frac{1}{2}$, το $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2}+\frac{1}{3}\alpha=\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{9}{4}}+\frac{1}{3}\alpha=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\alpha$

ii) Εφόσον η τιμή του ακροτάτου ισούται με $\frac{10}{9}$ θα ισχύει:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{10}{9}\Leftrightarrow\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\alpha=\frac{10}{9}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=3$$

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

α. Πρέπει $x>0$, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A=(0,+\infty)$

$$f'(x)=(\kappa\ln x-x^2)'=\kappa\cdot\frac{1}{x}-2x=\frac{\kappa}{x}-2x$$

Όμως $f'(4)=-6\Leftrightarrow\frac{\kappa}{4}-2\cdot4=-6\Leftrightarrow\frac{\kappa}{4}-8=-6\Leftrightarrow\frac{\kappa}{4}=-6+8\Leftrightarrow\frac{\kappa}{4}=2\Leftrightarrow\kappa=8$

β. $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{8}{x}-2x=0\Leftrightarrow\frac{8-2x^2}{x}=0\Leftrightarrow8-2x^2=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$ **(απορρ.)**

<u>Μονοτονία:</u> $f'(x)>0\Leftrightarrow(8-2x^2)x>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}8-2x^2>0\Leftrightarrow x^2<4\Leftrightarrow x<2$

Η f είναι γνησίως αυξουσα στο (0,2] και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$

<u>Ακρότατα:</u>

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο x=2, το $f(2)=8\ln2-4$

γ. Η f για κάθε x>2 είναι γνησίως φθίνουσα, άρα αφού α>β>2, θα ισχύει:

$\alpha>\beta\Leftrightarrow f(\alpha)<f(\beta)\Leftrightarrow8\ln\alpha-\alpha^2<8\ln\beta-\beta^2\Leftrightarrow8\ln\alpha-8\ln\beta<\alpha^2-\beta^2\Leftrightarrow$

$8(\ln\alpha-\ln\beta)<\alpha^2-\beta^2\Leftrightarrow8\ln\frac{\alpha}{\beta}<\alpha^2-\beta^2\Leftrightarrow\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^8<\alpha^2-\beta^2$

δ. Αφού η f για κάθε x>0 παρουσιάζει μέγιστο στο x=2, θα ισχύει:

$f(x)\le f(2)\Leftrightarrow8\ln x-x^2\le8\ln2-4\Leftrightarrow8\ln x-8\ln2\le x^2-4\Leftrightarrow8(\ln x-\ln2)\le x^2-4\Leftrightarrow$

$8\ln\frac{x}{2}\le x^2-4\Leftrightarrow\ln\frac{x}{2}\le\frac{x^2-4}{8}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (2η σειρά)

ΘΕΜΑ 1

Α. Σχολικό βιβλίο .Σελ.30

Β. Σχολικό βιβλίο .Σελ.27

Γ. α. (Λ) , **β.** (Σ) , **γ.** (Λ) , **δ.** (Σ) , **ε.** (Λ)

ΘΕΜΑ 2°

α. Η παράγωγος της f είναι $f'(x)=2x+\alpha$, άρα

$$f(-1)-f'(-1)=20 \Leftrightarrow 1-\alpha+5-(-2+\alpha)=20 \Leftrightarrow -2\alpha+8=20 \Leftrightarrow -2\alpha=12 \Leftrightarrow \alpha=-6$$

β. Για $\alpha=-6$ έχουμε $f'(x)=2x-6$ και $f''(x)=2$

$$\lim_{x\to5}\frac{f(x)}{f'(x)-2f''(x)}=\lim_{x\to5}\frac{x^2-6x+5}{(2x-6)-2\cdot2}=\lim_{x\to5}\frac{x^2-6x+5}{2x-10}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x-1)}{2(x-5)}=\lim_{x\to5}\frac{x-1}{2}=2$$

γ. i) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(4,f(4))$ έχει τη μορφή $y=f'(4)x+\beta$. Όμως $f'(4)=2\cdot4-6=2$ και $f(4)=4^2-6\cdot4+5=-3$, άρα η εξίσωση γίνεται $y=2x+\beta$

Το σημείο $M(4,f(4))$ ανήκει στην εφαπτομένη, άρα την επαληθεύει, οπότε:

$f(4)=2\cdot4+\beta \Leftrightarrow -3=8+\beta \Leftrightarrow \beta=-11$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης της f είναι $y=2x-11$

ii) Έστω $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής. Εφόσον η εφαπτομένη της f είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-4x+2012$, θα ισχύει $f'(x_0)=-4 \Leftrightarrow 2x_0-6=-4 \Leftrightarrow 2x_0=2 \Leftrightarrow x_0=1$.

Τότε $f(1)=1^2-6\cdot1+5=0$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-4x+2012$ έχει τη μορφή $y=f'(1)x+\beta \Leftrightarrow y=-4x+\beta$. Το σημείο $A(1,f(1))$ ανήκει στην εφαπτομένη άρα την επαληθεύει οπότε $f(1)=-4\cdot 1+\beta \Leftrightarrow 0=-4+\beta \Leftrightarrow \beta=4$ και άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης της f είναι $y=-4x+4$

ΘΕΜΑ 3°

α. Πρέπει $x^2-3x+2\neq 0$ άρα $x\neq 2$ και $x\neq 1$. Οπότε το πεδίο ορισμού είναι το $A=\mathbb{R}-\{1,2\}$

β. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+\lambda x+4}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{2}\alpha\right)'=\left(\dfrac{x^2+\lambda x+4}{x^2-3x+2}\right)'+\left(\dfrac{1}{2}\alpha\right)'=$

$$\frac{(x^2+\lambda x+4)'(x^2-3x+2)-(x^2+\lambda x+4)(x^2-3x+2)'}{(x^2-3x+2)^2}=$$

$$=\frac{(2x+\lambda)(x^2-3x+2)-(x^2+\lambda x+4)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}=$$

$$\frac{\cancel{2x^3}-6x^2+4x+\lambda x^2-\cancel{3\lambda x}+2\lambda-\cancel{2x^3}+3x^2-2\lambda x^2+\cancel{3\lambda x}-8x+12}{(x^2-3x+2)^2}=$$

$$\frac{-(\lambda+3)x^2-4x+(12+2\lambda)}{(x^2-3x+2)^2}$$

γ. i) Για να έχει δύο ακρότατα πρέπει η παράγωγος της f να έχει δύο ρίζες άνισες.

Δηλαδή πρέπει $\lambda+3\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq -3$ και $\Delta>0 \Leftrightarrow 16+4\cdot(\lambda+3)\cdot(2\lambda+12)>0 \Leftrightarrow$

$16+8\lambda^2+72\lambda+144>0 \Leftrightarrow 8\lambda^2+72\lambda+160>0 \Leftrightarrow \lambda^2+9\lambda+20>0$,

άρα λύνουμε την εξίσωση $\lambda^2+9\lambda+20=0$ που δίνει $\lambda=-4$ ή $\lambda=-5$

Από πίνακα προσήμων προκύπτει $\lambda\in(-\infty,-5)\cup(-4,-3)\cup(-3,+\infty)$

ii) Για να έχει ένα ακρότατο πρέπει να είναι 1^ου^ βαθμού, δηλαδή $\lambda+3=0 \Leftrightarrow \lambda=-3$

δ. i) Για $\lambda=-3$ η παράγωγος της f είναι $f'(x)=\dfrac{-4x+6}{(x^2-3x+2)^2}$

Για να βρούμε το ακρότατο πρέπει $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x+6}{(x^2-3x+2)^2}=0 \Leftrightarrow -4x+6=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$

Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x=\dfrac{3}{2}$, το $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+4}{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+2}+\dfrac{1}{2}\alpha=\dfrac{\frac{7}{4}}{-\frac{1}{4}}+\dfrac{1}{2}\alpha=-7+\dfrac{1}{2}\alpha$

ii) Εφόσον η τιμή του ακροτάτου ισούται με -5, θα ισχύει:

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=-5 \Leftrightarrow -7+\frac{1}{2}\alpha=-5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=4$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Πρέπει $x>0$, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A=(0,+\infty)$

$$f'(x)=(\ln x-\kappa x^2)'=\frac{1}{x}-2\kappa x$$

Όμως $f'(2)=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}-2\cdot\kappa\cdot 2=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}-4\kappa=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow 4\kappa=2 \Leftrightarrow \kappa=\frac{1}{2}$

β. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}-x=0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x}=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$ **(απορρ.)**

Μονοτονία: $f'(x)>0 \Leftrightarrow (1-x^2)x>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow x<1$

Η f είναι γνησίως αυξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Ακρότατα:

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο x=1, το $f(1)=\ln 1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

γ. Η f για κάθε x>1 είναι γνησίως φθίνουσα, άρα αφού α>β>1, θα ισχύει:

$$\alpha>\beta \Leftrightarrow f(\alpha)<f(\beta) \Leftrightarrow \ln\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2<\ln\beta-\frac{1}{2}\beta^2 \Leftrightarrow \ln\alpha-\ln\beta<\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{2}\beta^2 \Leftrightarrow \ln\frac{\alpha}{\beta}<\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2) \Leftrightarrow$$

$$2\ln\frac{\alpha}{\beta}<\alpha^2-\beta^2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2<\alpha^2-\beta^2$$

δ. Αφού η f για κάθε x>0 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x=1, θα ισχύει

$$f(x)\le f(1) \Leftrightarrow \ln x-\frac{1}{2}x^2\le \ln 1-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x\le\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x\le\frac{x^2-1}{2}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΧΕΙΜΕΡΙΝΑ

ΘΕΜΑ 1

Α$_1$. Σχολικό βιβλίο. Σελ.28

Α$_2$. Σχολικό βιβλίο. Σελ.22

Β. **α.** (Λ) , **β.** (Λ) , **γ.** (Σ) , **δ.** (Λ) , **ε.** (Σ)

ΘΕΜΑ 2°

α. Πρέπει $-x^2+2x>0 \Leftrightarrow x\in(0,2)$. Άρα Α=$(0,2)$

β. $f'(x)=\left[\ln(-x^2+2x)+\alpha x+\beta\right]'=\left[\ln(-x^2+2x)\right]'+(\alpha x+\beta)'=$

$$\frac{1}{-x^2+2x}(-x^2+2x)'+\alpha=\frac{-2x+2}{-x^2+2x}+\alpha$$

γ. Εφόσον η γραφική παράσταση διέρχεται απο το σημείο $A(1,1)$ θα ισχύει

$f(1)=1\Leftrightarrow \ln 1+\alpha+\beta=1\Leftrightarrow \alpha+\beta=1$ και $f'(1)=2\Leftrightarrow \dfrac{-2+2}{-1+2}+\alpha=2\Leftrightarrow \alpha=2$ και

$\beta=1-\alpha$ άρα $\beta=-1$

δ. Για α=2: $f'(x)=\dfrac{-2x+2}{-x^2+2x}+2=\dfrac{-2x+2-2x^2+4x}{-x^2+2x}=\dfrac{-2x^2+2x+2}{-x^2+2x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{-2x^2+2x+2}{-x^2+2x}=0\Leftrightarrow -2x^2+2x+2=0\Leftrightarrow x^2-x-1=0$ με Δ=5>0,

άρα η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία.

ΘΕΜΑ 3°

α. i) Εφόσον η f είναι συνεχής σ'όλο το $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο x=1

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+3x^2+x-5}{\kappa(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+4x+5)}{\kappa\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+4x+5)}{\kappa}=\frac{10}{\kappa}$$

και $f(1)=\dfrac{\kappa}{10}$

Αφού η f είναι συνεχής στο x=1 θα ισχύει

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \frac{10}{\kappa} = \frac{\kappa}{10} \Leftrightarrow \kappa^2 = 100 \Leftrightarrow \kappa = 10 \;\; ή \;\; \kappa = -10$$

Όμως $\kappa \in (-\infty, 0)$, άρα κ=-10

ii) Πρέπει $x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$ και $\sqrt{x+5} - 3 \neq 0$. Είναι $\sqrt{x+5} = 3 \Leftrightarrow x+5 = 9 \Leftrightarrow x = 4$,

οπότε A=$[-5,4) \cup (4,+\infty)$

β. i) $$\lim_{x\to 4} g(x) = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x+5}-3} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-1)(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-1)(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x+5}\right)^2 - 9} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-1)(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{x+5-9} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-1)\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{\cancel{x-4}} =$$

$$\lim_{x\to 4} (x-1)\left(\sqrt{x+5}+3\right) = 3 \cdot 6 = 18$$

ii) $$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2+x-5}{-10(x-1)} = \frac{2^3+3\cdot 2^2+2-5}{-10(2-1)} = -\frac{17}{10}$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x+5}-3} = \frac{2^2-5\cdot 2+4}{\sqrt{2+5}-3} = -\frac{2}{\sqrt{7}-3}$$, άρα

$$\lim_{x\to 2} \left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x) = -\frac{17}{10} - \frac{2}{\sqrt{7}-3} =$$

$$-\frac{17}{10} - \frac{2\left(\sqrt{7}+3\right)}{-2} = -\frac{17}{10} + \left(\sqrt{7}+3\right)$$

γ. Από βi) έχουμε $\lim_{x\to 4} g(x) = 18$ άρα $\lim_{x\to 4} h(x) = \lim_{x\to 4} g(x) = 18$

Ακόμα $$h(4) = \lim_{t\to 2} \frac{t^2+2t-8}{t^3-8} = \lim_{t\to 2} \frac{\cancel{(t-2)}(t+4)}{\cancel{(t-2)}\left(t^2+2t+4\right)} = \lim_{t\to 2} \frac{t+4}{t^2+2t+4} = \frac{2+4}{2^2+2\cdot 2+4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 4} h(x) \neq h(4)$, άρα η h (x) δεν είναι συνεχής στο x=4

ΘΕΜΑ 4^o

α. Εφόσον η f τέμνει τον x′x στο $x_0 = 2$ θα ισχύει

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 - \alpha \cdot 2^2 - 2 + \beta = 0 \Leftrightarrow 8 - 4\alpha - 2 + \beta = 0 \Leftrightarrow -4\alpha + \beta = -6$$

Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x - 1$

Αφού η εξίσωση $f'(x) = -2$ έχει λύση την x=1 θα ισχύει

$$f'(1) = -2 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 - 2\alpha \cdot 1 - 1 = -2 \Leftrightarrow 2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

Επομένως $-4\alpha+\beta=-6 \Leftrightarrow -4\cdot 2+\beta=-6 \Leftrightarrow \beta=8-6 \Leftrightarrow \beta=2$

β. i) $f''(x)=6x-4$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f''(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x-4-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=6$$

ii) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{\frac{f''(x)-2}{6}}-1}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{\frac{6x-4-2}{6}}-1}{x^2-4}\right)=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{\frac{6x-6}{6}}-1}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4}\right)=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-1}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\frac{1}{4\cdot 2}=\frac{1}{8}$$

γ. Έχουμε την συνάρτηση g(x)= $e^x\cdot f(x)$ για την οποία

$$g'(x)=\left(e^x f(x)\right)'=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\left(f(x)+f'(x)\right)$$

Άρα $$\frac{g'(x)}{e^x}=x^3+3x^2+4x-4 \Leftrightarrow \frac{\cancel{e^x}\left(f(x)+f'(x)\right)}{\cancel{e^x}}=x^3+3x^2+4x-4 \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(x^3-2x^2-x+2\right)+\left(3x^2-4x-1\right)\right]=x^3+3x^2+4x-4$$

$$\Leftrightarrow x^3+x^2-5x+1=x^3+3x^2+4x-4 \Leftrightarrow$$

$-2x^2-9x+5=0$, με λύσεις $x=-5,\quad x=\frac{1}{2}$