ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΣΕΙΡΑ:	**ΧΕΙΜΕΡΙΝΑ & ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	**08/01/2012**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{ο}}$

Α. Σχολικό βιβλίο. Σελ.31

Β. **α.** Σχολικό βιβλίο. Σελ.58, **β.** Σχολικό βιβλίο. Σελ.59, **γ.** Σχολικό βιβλίο. Σελ.59

Γ. **α.** Λ , **β.** Λ , **γ.** Σ , **δ.** Σ , **ε.** Λ

ΘΕΜΑ 2°

Α. $f(3)=4 \Leftrightarrow \frac{3^3}{3}+3^2\alpha+3(\alpha+4)-5=4 \Leftrightarrow 9+9\alpha+3\alpha+12-5=4 \Leftrightarrow 12\alpha=-12 \Leftrightarrow \alpha=-1$

Β. Για $\alpha=-1$: $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+3x-5$ και $f'(x)=x^2-2x+3$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x+3=0$ με $\Delta=4-4\cdot1\cdot3=4-12=-8<0$

Άρα $f'(x)>0$, οπότε η f δεν έχει ακρότατα (αφού είναι γνησίως αύξουσα στο)

Γ. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y=f'(3)x+\beta$, όπου

$f'(3)=3^2-2\cdot3+3=9-6+3=6$. Όμως το σημείο Μ(3,4) επαληθεύει την εφαπτομένη,

άρα $4 = 6\cdot3 + \beta \Leftrightarrow 4=18+\beta \Leftrightarrow \beta=-14$

Επομένως η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y=6x-14$

Δ. $f'(1)=1^2-2\cdot1+3=2$ και $f(3)=\frac{3^3}{3}-3^2+3\cdot3-5=9-9+9-5=4$

$f_1=\frac{v_1}{v} \Leftrightarrow 0,1=\frac{2}{v} \Leftrightarrow v=20$, $N_1=v_1=2$ και $F_1=f_1=0,1$ ή 10%

$v_2=N_2-N_1=8-2=6$, $f_2=\frac{v_2}{v} \Leftrightarrow f_2=\frac{6}{20} \Leftrightarrow f_2=0,3$ ή 30% ,

$F_2\%=F_1\%+f_2\%=40\%$

$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=\nu \Leftrightarrow 2+6+\nu_3+8=20 \Leftrightarrow \nu_3=4$

$f_3=\dfrac{\nu_3}{\nu} \Leftrightarrow f_3=\dfrac{4}{20} \Leftrightarrow f_3=0{,}2$ ή 20% , $N_3=N_2+\nu_3=8+4=12$

$F_3\%=F_2\%+f_3\%=60\%$, $f_4=\dfrac{\nu_4}{\nu} \Leftrightarrow f_4=\dfrac{8}{20} \Leftrightarrow f_4=0{,}4$ ή 40%

$N_4=\nu=20$ και $F_4\%=100\%$

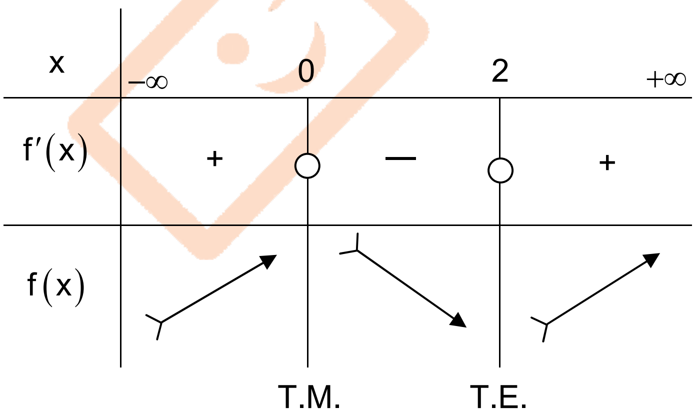
x_i	ν_i	f_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	2	0,1	2	10	10
2	6	0,3	8	30	40
3	4	0,2	12	20	60
4	8	0,4	20	40	100
Σύνολο	20	1	_	100	_

ΘΕΜΑ 3°

Α. $f'(x)=3x^2-6x$, $x\in$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$, x=2

Ο πίνακας προσήμου της $f'(x)$ και μεταβολών της $f(x)$ είναι:



Μονοτονία

Η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και στο $[2,+\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $[0,2]$

Β. Η f παρουσιάζει Τ.Μ στο $x_0=0$, το $f(0)=0^3-3\cdot 0^2+\lambda=\lambda$ και Τ.Ε στο $x_0=2$,

το $f(2)=2^3-3\cdot 2^2+\lambda=8-12+\lambda=-4+\lambda$

Γ. i) $f(0)+f(2)=6 \Leftrightarrow \lambda-4+\lambda=6 \Leftrightarrow 2\lambda=10 \Leftrightarrow \lambda=5$

ii) $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+f'(x)+f''(x)}{\sqrt{x^2+3}-2x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-3x^2+5)+(3x^2-6x)+(6x-6)}{\sqrt{x^2+3}-2x}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+5+3x^2-6x+6x-6}{\sqrt{x^2+3}-2x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+3}-2x}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-(2x)^2}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}{x^2+3-4x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}{3-3x^2}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}{3(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}{-3\cancel{(x-1)}(1+x)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}{-3(1+x)}=\frac{(1^2+1+1)\left(\sqrt{1^2+3}+2\cdot 1\right)}{-3(1+1)}=\frac{3\cdot 4}{-6}=-2$$

iii) Έστω $A(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής. Τότε εφόσον οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες με την $y=9x-2012$, θα ισχύει:

$f'(x_0)=9 \Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=9 \Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0-9=0 \Leftrightarrow$

$x_0^2-2x_0-3=0 \Leftrightarrow x_0=3,\ \ x_0=-1$. Είναι $f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+5=-1-3+5=1$

και $f(3)=3^3-3\cdot 3^2+5=5$

$y=9x+\beta$, οπότε $f(-1)=9(-1)+\beta \Leftrightarrow 1=-9+\beta \Leftrightarrow \beta=10$, άρα $y=9x+10$

$y=9x+\beta$, οπότε $f(3)=9\cdot 3+\beta \Leftrightarrow 5=27+\beta \Leftrightarrow \beta=-22$, άρα $y=9x-22$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. $f_i=\dfrac{2i^2-5i+9}{\kappa}$, τότε: $f_1=\dfrac{2-5+9}{\kappa}=\dfrac{6}{\kappa}$, $f_2=\dfrac{8-10+9}{\kappa}=\dfrac{7}{\kappa}$, $f_3=\dfrac{18-15+9}{\kappa}=\dfrac{12}{\kappa}$

$f_4=\dfrac{32-20+9}{\kappa}=\dfrac{21}{\kappa}$, $f_5=\dfrac{50-25+9}{\kappa}=\dfrac{34}{\kappa}$

Όμως $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=1\Leftrightarrow \dfrac{6}{\kappa}+\dfrac{7}{\kappa}+\dfrac{12}{\kappa}+\dfrac{21}{\kappa}+\dfrac{34}{\kappa}=1\Leftrightarrow \dfrac{80}{\kappa}=1\Leftrightarrow \kappa=80$

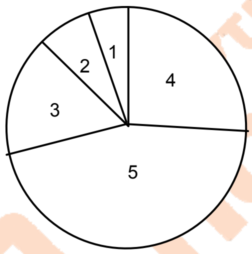
Β. $f_1=\dfrac{6}{80}=0{,}075$, $f_2=\dfrac{7}{80}=0{,}0875$, $f_3=\dfrac{12}{80}=0{,}15$, $f_4=\dfrac{21}{80}=0{,}2625$,

$f_5=\dfrac{34}{80}=0{,}425$, $\alpha_1=f_1\cdot 360^o=0{,}075\cdot 360^o=27^o$, $\alpha_2=f_2\cdot 360^o=0{,}0875\cdot 360^o=31{,}5^o$

$\alpha_3=f_3\cdot 360^o=0{,}15\cdot 360^o=54^o$, $\alpha_4=f_4\cdot 360^o=0{,}2625\cdot 360^o=94{,}5^o$

$\alpha_5=f_5\cdot 360^o=0{,}425\cdot 360^o=153^o$

κυκλικό διάγραμμα



Γ. i) Πρέπει x>0

$$g'(x)=\left(x^4-4\ln x+49\right)'=4x^3-4\cdot\frac{1}{x}=\frac{4x^4-4}{x}=\frac{4\left(x^4-1\right)}{x}=\frac{4\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{x}$$

$g'(x)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1$, το $x=-1$ απορ. γιατί x>0

Ο πίνακας προσήμου της $g'(x)$ και μεταβολών της $g(x)$ είναι:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘		↗	
			ΕΛΑΧ.		

$g(1)=1-4\ln 1+49=50$. Άρα $N_3=g(1)=50$

$F_3=f_1+f_2+f_3=0{,}075+0{,}0875+0{,}15=0{,}3125$

$F_3=\dfrac{N_3}{v}\Leftrightarrow 0{,}3125=\dfrac{50}{v}\Leftrightarrow v=160$

ii) $v_1=f_1\cdot v=0{,}075\cdot 160=12$, $v_2=f_2\cdot v=0{,}0875\cdot 160=14$, $v_3=f_3\cdot v=0{,}15\cdot 160=24$

$v_4=f_4\cdot v=0{,}2625\cdot 160=42$, $v_5=f_5\cdot v=0{,}425\cdot 160=68$

$N_1=v_1=12$, $N_2=N_1+v_2=26$, $N_3=N_2+v_3=50$, $N_4=N_3+v_4=92$

$N_5=N_4+v_5=160$ και ομοίως για τις F_i: $F_2=F_1+f_1,...$

Πίνακας κατανομής v_i, f_i, N_i, F_i

Υπάλληλοι x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1	12	0,075	12	0,075
2	14	0,0875	26	0,1625
3	24	0,15	50	0,3125
4	42	0,2625	92	0,575
5	68	0,425	160	1
Σύνολο	160	1	–	–

iii) **α)** Το ποσοστό των γραφείων που έχουν τουλάχιστον 2 άτομα είναι:

$100\%-f_1\%=100\%-7{,}5\%=92{,}5\%$

β) Το ποσοστό των γραφείων που έχουν το πολύ 3 άτομα είναι:

$F_3\%=31{,}25\%$