



ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ/ Γ' ΕΠΑΛ
ΣΕΙΡΑ:	
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	28/12/11

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A) Σελ. 61 φροντιστηριακού βιβλίου : ορισμός
 Β) Σελ. 28 φροντιστηριακού βιβλίου
 Γ) α) Σωστό, β) Σωστό, γ) Σωστό, δ) Λάθος, ε) Σωστό

ΘΕΜΑ 2^ο

A. $v_2 = v - (v_1 + v_3 + v_4) = 50 - (8 + 16 + 14) = 12,$

Οι σχετικές συχνότητες % υπολογίζονται από τον τύπο $f_i\% = \frac{v_i}{v} \cdot 100 :$

$$f_1\% = \frac{v_1}{v} \cdot 100 \Leftrightarrow f_1\% = \frac{8}{50} \cdot 100 = 16, f_2\% = \frac{v_2}{v} \cdot 100 \Leftrightarrow f_2\% = \frac{12}{50} \cdot 100 = 24$$

$$f_3\% = \frac{v_3}{v} \cdot 100 \Leftrightarrow f_3\% = \frac{16}{50} \cdot 100 = 32, f_4\% = \frac{v_4}{v} \cdot 100 \Leftrightarrow f_4\% = \frac{14}{50} \cdot 100 = 28,$$

Επίσης

$$N_1 = v_1 = 8, N_2 = N_1 + v_2 = 8 + 12 = 20, N_3 = N_2 + v_3 = 20 + 16 = 36, N_4 = N_3 + v_4 = 36 + 14 = 50$$

$$F_1\% = f_1\% = 16, F_2\% = F_1\% + f_2\% = 16 + 24 = 40, F_3\% = F_2\% + f_3\% = 40 + 32 = 72,$$

$$F_4\% = F_3\% + f_4\% = 72 + 28 = 100$$

Βιβλία x_i	Μαθητές v_i	Σχετική Συχνότητα % $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %	$x_i v_i$
1	8	16	8	16	8
2	12	24	20	40	24
3	16	32	36	72	48
4	14	28	50	100	56





Αθροίσματα	50	100	-	-	136
------------	----	-----	---	---	-----

$$B. \bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_4 v_4}{v} = \frac{136}{50} = 2,72$$

Η διάμεσος του δείγματος θα προσδιοριστεί από το ημίαθροισμα της 25^{ης} και 26^{ης} από τις παρατηρήσεις καθώς το μέγεθος του δείγματος είναι άρτιος αριθμός.

$$\text{Έχουμε λοιπόν: } \delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$$

Γ. Η επικρατούσα τιμή είναι το 3 που είναι η τιμή της μεταβλητής με τη μεγαλύτερη συχνότητα (εδώ 16)

$$\text{Επειδή δίνεται ότι: } (x_1 - 2,72)^2 v_1 + (x_2 - 2,72)^2 v_2 + (x_3 - 2,72)^2 v_3 + (x_4 - 2,72)^2 v_4 = 180$$

η διασπορά είναι $s^2 = \frac{180}{50} = 3,6$, άρα η τυπική απόκλιση είναι

$S = \sqrt{3,6}$. Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{\sqrt{3,6}}{2,72} \cdot 100$$

Δ. α) Οι μαθητές που διάβασαν τουλάχιστον 3 βιβλία είναι $v_3 + v_4 = 16 + 14 = 30$

β) Το ποσοστό των μαθητών που διάβασαν το πολύ 2 βιβλία είναι

$$f_1\% + f_2\% = 16 + 24 = 40$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$

$$\text{όμως } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{64(\sqrt{x} - 2)}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{64(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x^2 - 16)(\sqrt{x} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{64(x - 4)}{(x - 4)(x + 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{64}{32} = 2.$$

Άρα $2 = \lambda \cdot 4 + \mu$, (1)

Επίσης επειδή η f διέρχεται από το $A(1, -2)$ έχουμε ότι $f(1) = -2$, άρα

$$\lambda \cdot 1 + \mu = -2, \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2) και πέρνουμε $\lambda = \frac{4}{3}$ και $\mu = -\frac{10}{3}$





Β. Επειδή η g είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$

Όμως για $x \neq 2$ είναι $g(x) = \frac{(\alpha+1)x^2 - (2\alpha-1)x - 6}{x-2}$ και παρατηρούμε ότι

$\lim_{x \rightarrow 2} (\alpha+1)x^2 - (2\alpha-1)x - 6 = 0$ οπότε το παραγοντοποιούμε κάνοντας Horner με το 2

$\alpha+1$	$-(2\alpha-1)$	-6	2
\downarrow	$2\alpha+2$	6	
$\alpha+1$	3	0	

Επομένως $(\alpha+1)x^2 - (2\alpha-1)x - 6 = [(\alpha+1)x + 3](x-2)$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[(\alpha+1)x + 3](x-2)}{x-2} = 2\alpha + 5$$

επίσης $g(2) = 9$, οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$ έχουμε

$$2\alpha + 5 = 9 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

Γ. α) πρέπει $1 - 2x^2 \geq 0$, άρα $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(0) - h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-2x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1-2x^2})(1 + \sqrt{1-2x^2})}{x(1 + \sqrt{1-2x^2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x(1 + \sqrt{1-2x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 + \sqrt{1-2x^2}} = 0$$

ΘΕΜΑ 4^ο

$$A. v_1 = 5 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 5x - 6}{\sqrt{x+2} - 2} = 5 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(x-3)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} =$$

$$5 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)(x-3)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)} = -5 \lim_{x \rightarrow 2} (x-3)(\sqrt{x+2} + 2) = (-5)(-1)(4) = 20$$





$$v_3 = -2 \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 15x + 50}{x - 5} = -2 \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-10)}{(x-5)} =$$

$$-2 \lim_{x \rightarrow 5} (x-10) = (-2)(-5) = 10$$

Β. Παρατηρούμε ότι

κλάσεις [,)	κεντρικοί όροι x_i
$x_{\min}, x_{\min} + c)$	$\frac{2x_{\min} + c}{2}$
$x_{\min} + c, x_{\min} + 2c)$	$\frac{2x_{\min} + 3c}{2}$
$x_{\min} + 2c, x_{\min} + 3c)$	$\frac{2x_{\min} + 5c}{2}$
$x_{\min} + 3c, x_{\min} + 4c)$	$\frac{2x_{\min} + 7c}{2}$
$x_{\min} + 4c, x_{\min} + 5c]$	$\frac{2x_{\min} + 9c}{2}$
σύνολο	

Επομένως $16 = x_{\min} + 4c$ (1) και

$$\frac{2x_{\min} + 5c}{2} = \lim_{x \rightarrow 9} (2x - 8), \text{ άρα } \frac{2x_{\min} + 5c}{2} = 10 \Leftrightarrow 2x_{\min} + 5c = 20 \text{ (2)}$$

Λύνοντας το σύστημα (1), (2) παίρνουμε $c=4$ και $x_{\min}=0$

Γ. Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα και ότι ισχύει:

$$N_4 = N_3 + v_4, \text{ άρα } 170 = 70 + v_4 \Leftrightarrow v_4 = 100,$$

$$N_3 = v_1 + v_2 + v_3, \text{ άρα } 70 = 20 + v_2 + 10 \Leftrightarrow v_2 = 40,$$

$$F_4 \% = F_3 \% + f_4 \%, \text{ άρα } 85 = 35 + f_4 \% \Leftrightarrow f_4 \% = 50$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v}, \text{ άρα } 0,5 = \frac{100}{v} \Leftrightarrow v = \frac{4}{0,5} \Leftrightarrow \boxed{v = 200}$$

$$v_5 = v - (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 200 - (20 + 40 + 10 + 100) = 30$$

$$f_i = \frac{v_i}{v}, \quad N_1 = v_1 = 20, \quad N_2 = N_1 + v_2 = 20 + 40 = 60, \quad N_5 = v = 200$$





$$F_1\% = f_1\% = 10, F_2\% = F_1\% + f_2\% = 10 + 20 = 30, F_5\% = 100$$

Ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις [,)	Κεντρικοί όροι x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0-4	2	20	0,1	10	20	10
4-8	6	40	0,2	20	60	30
8-12	10	10	0,05	5	70	35
12-16	14	100	0,5	50	170	85
16-20	18	30	0,15	15	200	100
Σύνολο		200	1	100	-	-

Δ. α) το πολύ 12 λάθη έκαναν $N_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 70$ μαθητές και το ποσοστό τους είναι

$$F_3\% = f_1\% + f_2\% + f_3\% = 35$$

β) τουλάχιστον 8 λάθη έκαναν $v_3 + v_4 + v_5 = 10 + 100 + 30 = 140$ μαθητές

$$\text{με ποσοστό } f_3\% + f_4\% + f_5\% = 70$$

γ) Από 10 ως 14 λάθη έκαναν $\frac{1}{2}v_3 + \frac{1}{2}v_4 = \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 100 = 55$ μαθητές

$$\text{με ποσοστό } \frac{1}{2}f_3\% + \frac{1}{2}f_4\% = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 50 = 2,5 + 25 = 27,5$$

δ) Παρατηρούμε ότι $f_1\% + \frac{1}{2}f_2\% = 10 + \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 + 10 = 20$, άρα το 20% των μαθητών έχουν κάνει το πολύ 6 λάθη. Οπότε για να επιλεγεί ένας μαθητής στο 20% πρέπει να έχει κάνει το πολύ 6 λάθη.

