

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A₁.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = f(x) + g(x)$, είναι $F'(x) = f'(x) + g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις. (Μονάδες 10)
- A₂.** Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (Μονάδες 5)
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και $x_0 \in A$
Αν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f
- β.** Για τις συναρτήσεις f και g ισχύει πάντα ότι:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$
 με $x_0 \in D_f$ και $x_0 \in D_g$
- γ.** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σύνολο A όταν $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in A$
- δ.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$.
Τότε ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν $x = x_0$, είναι πάντα ο αριθμός $(f(x_0))'$
- ε.** Ισχύει ότι $(x^p)' = x^{p-1}$, όπου p ρητός και $x > 0$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(3x^2 + 2x) + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 5)
- β.** Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ (Μονάδες 7)
- γ.** Να βρείτε τα α, β ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, -1)$ και να ισχύει $f'(-1) = -1$ (Μονάδες 8)

δ. Για $\alpha=3$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f'(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{\lambda(x-2)}, & x \neq 2 \\ \frac{\lambda}{3}, & x = 2 \end{cases}$, όπου $\lambda \in (-\infty, 0)$

και η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{2 - \sqrt{3x + 1}}$

- α. i) Να υπολογίσετε τη τιμή του λ
ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 4)

β. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

(Μονάδες 6)

ii) $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x))$

(Μονάδες 5)

γ. Εξετάστε αν η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} g(x), & x < 1 \\ \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - 4t + 3}{t^3 - 27}, & x = 1 \end{cases}$

είναι συνεχής στο $x = 1$

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x + \lambda$ με $k, \lambda \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = -1$. Αν η εξίσωση

$f'(x) = 3$ έχει λύση την $x = -\frac{2}{3}$, τότε:

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των k, λ

(Μονάδες 8)

β. Για $k = 1, \lambda = 3$ να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x) - 14}{x - 2}$

(Μονάδες 3)

ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{\frac{f''(x) - 14}{6}} - 1}{x^2 - 9} \right)$

(Μονάδες 6)

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{g''(x)}{e^x} = x^3 + 3x^2 + 9x + 3$, όπου $g(x) = e^{xf(x)}$

Μονάδες 8)

Ευχόμαστε επιτυχία!!!