ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ - ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ

Θέμα 1ο
Ο (ελλιπής) πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει την κατανομή συχνοτήτων (απολύτων, σχετικών %, σχετικών αθροιστικών %) των παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X. Οι παρατηρήσεις είναι ομαδοποιημένες ομοιόμορφα σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

Κλάσεις [.,.)	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
$\ldots - 4$	κ			
$- \ldots$	λ		36	
$\ldots - \ldots$	μ			
$\ldots - 16$	$\lambda - 4$			
$\ldots - \ldots$	$\kappa + 4$	20		
Σύνολο	ν		–	–

Αν η τιμή του κ ισούται με τη θέση του ακροτάτου της συνάρτησης $f(x) = 12(\ln x) - x$, τότε:

α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.
β) Να υπολογίσετε:
   i) Το πλήθος των παρατηρήσεων με τιμή μεγαλύτερη του 11
   ii) Το ποσοστό των παρατηρήσεων με τιμή μικρότερη του 12 ή μεγαλύτερη του 18

Λύση
α) Αν c το πλάτος καθεμιάς από τις πέντε κλάσεις και α το αριστερό άκρο της πρώτης από αυτές, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$\begin{cases} \alpha + c = 4 \\ \alpha + 4c = 16 \end{cases}$ από τις οποίες παίρνουμε:

$$\begin{cases} \alpha + c = 4 \\ 3c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

Έτσι τα άκρα των κλάσεων είναι 0, 4, 8, 12, 16, 20 και οι κλάσεις: [0, 4), [4, 8), [8, 12), [12, 16) και [16, 20)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο:

$$f'(x) = (12\ln x - x)' = (12\ln x)' - x' = \frac{12}{x} - 1 = \frac{12 - x}{x}$$

Για $x > 0$, θέτουμε $f'(x) = 0$, οπότε

$\frac{12 - x}{x} = 0 \Leftrightarrow 12 - x = 0 \Leftrightarrow x = 12$ και $f'(x) > 0$,

οπότε $\frac{12 - x}{x} > 0$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} 12 - x > 0 \Leftrightarrow x < 12$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 12]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[12, +\infty)$. Άρα παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 12$, το $f(12)$, συνεπώς

$\kappa = \nu_1 = 12$ και $\nu_5 = \kappa + 4 = 16$

Ισχύει: $f_5 = \frac{\nu_5}{\nu}$, άρα $0{,}2 = \frac{16}{\nu} \Leftrightarrow \nu = 80$. Ακόμη

$N_2 = 36 \Leftrightarrow \nu_1 + \nu_2 = 36 \Leftrightarrow \nu_2 = 36 - 12 \Leftrightarrow$

$\nu_2 = 24 = \lambda$, οπότε: $\nu_4 = \lambda - 4 = 24 - 4 = 20$

Είναι $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \nu \Leftrightarrow$

$12 + 24 + \mu + 20 + 16 = 80 \Leftrightarrow \mu = 8 = \nu_3$

Σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία και χρησιμοποιώντας τους τύπους

$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, $N_i = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_i$ και

$F_i\% = f_1\% + f_2\% + \ldots + f_i\%$,

ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Κλάσεις [.,.)	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0 – 4	12	15	12	15
4 – 8	24	30	36	45
8 – 12	8	10	44	55
12 – 16	20	25	64	80
16 – 20	16	20	80	100
Σύνολο	80	100	–	–

Οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες μέσα στις κλάσεις. Επομένως:

β) i) Το πλήθος των παρατηρήσεων με τιμή μεγαλύτερη του 11 είναι:

$$\frac{1}{4}\nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \frac{1}{4}8 + 20 + 16 = 38$$

ii) Το ποσοστό των παρατηρήσεων με τιμή μικρότερη του 12 είναι $F_3\% = 55$ και με τιμή μεγαλύτερη του 18 είναι $\frac{1}{2}f_5\% = 10$, άρα ζητούμενο ποσοστό: $55\% + 10\% = 65\%$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΤΗ ΣΕΛΙΔΑ 12 ►

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΖΑΜΠΕΛΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΔΙΟΛΙΤΣΗΣ
ΑΘΑΝΑΣΙΑ ΠΑΠΑΣΤΑΜΑΤΗ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ
ΝΙΚΟΣ ΖΑΧΟΠΟΥΛΟΣ
ΝΙΚΟΛΕΤΤΑ ΜΠΑΚΟΥ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΣΑΛΤΕΡΗΣ
ΕΦΗ ΠΕΡΙΣΤΕΡΗ

- Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ με σχετικές συχνότητες $f_1, f_2, \dots, f_\kappa$ αντίστοιχα, τότε η μέση τιμή ορίζεται από τη σχέση: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$
- Διάμεσος ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση όταν το ν είναι περιττός αριθμός.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

Ζαν Λε Ροντ Ντ΄ Αλαμπέρ (11717-1783)

Ένας από τους κορυφαίους εκπροσώπους του γαλλικού Διαφωτισμού, που διέπρεψε ως φιλόσοφος, συγγραφέας, φυσικός, αλλά και μαθηματικός. Το όνομά του είναι άμεσα συνδεδεμένο με την επιμέλεια και έκδοση του πολύτομου έργου «Encyclopedie» («Εγκυκλοπαίδεια»), που αποτέλεσε μνημειώδη έκφραση των ιδεωδών του Διαφωτισμού. Ως μαθηματικός ο ντ' Αλαμπέρ συνέβαλε σημαντικά στην αντιμετώπιση των προβλημάτων των σχετικών με τη δυναμική των υλικών σωμάτων, διατυπώνοντας στο βιβλίο του «Πραγματεία περί δυναμικής» (1743) τη φερώνυμη αρχή της μηχανικής για την κίνηση του υλικού συστήματος. Συνέβαλε επίσης στην ανάπτυξη των αναλυτικών συναρτήσεων μιγαδικού ορίσματος και στη θεωρία των συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ήταν ο πρώτος που διατύπωσε το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας για το πλήθος των ριζών αλγεβρικής εξίσωσης...

►ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΣΕΛΙΔΑ 11

Θέμα 2ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή συχνοτήτων των θερμοκρασιών (σε °C) που σημειώθηκαν σε 40 πόλεις της Ευρώπης κατά τη διάρκεια μιας μέρας του Απριλίου.

Θερμοκρασία (σε °C)	Πόλεις ν_i
0	2α
1	α
2	β
3	2α
4	α
5	β+4
Σύνολο	40

Αν β η θέση του ακροτάτου της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{\kappa^2}{2}x^2 - 6\kappa^2 x + \mu, \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}^*, \mu \in \mathbb{R}$$

και ο μέσος όρος των θερμοκρασιών που σημειώθηκαν είναι 2,65 °C, τότε:

α) Να βρείτε τους α, β.

β) Να βρείτε το πλήθος καθώς και το ποσοστό των πόλεων στις οποίες σημειώθηκαν θερμοκρασίες με τιμή από 1 °C έως 4 °C.

γ) Να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος.

δ) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα καθώς και το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων f_i του δείγματος.

Λύση

α) Η $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{\kappa^2}{2}x^2 - 6\kappa^2 x + \mu$ έχει παράγωγο: $f'(x) = x^3 - 6x^2 + \kappa^2 x - 6\kappa^2$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + \kappa^2 x - 6\kappa^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x(x^2+\kappa^2) - 6(x^2+\kappa^2) = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x^2+\kappa^2) = 0$,

οπότε: $x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (αφού $x^2 + \kappa^2 > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$).

Ακόμη: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 6$ (αφού $x^2 + \kappa^2 > 0$)

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 6]$ και γνησίως αύξουσα στο $[6, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει στο $x = 6$, (ολικό) ελάχιστο.

Επομένως, $\beta = \nu_3 = 6$ και $\nu_6 = 10$

Είναι $\bar{x} = 2{,}65$, οπότε σύμφωνα με τον τύπο $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{6} x_i \nu_i$ έχουμε:

$1\cdot\alpha + 2\cdot 6 + 3\cdot 2\alpha + 4\cdot\alpha + 5\cdot 10 = 2{,}65\cdot 40$

$\Leftrightarrow \alpha = \nu_2 = \nu_5 = 4$ και $\nu_1 = \nu_4 = 8$

β) Το ζητούμενο πλήθος είναι:

$\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 4 + 6 + 8 + 4 = 22$ πόλεις, ενώ το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$[(\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5)100\%] : \nu = (22 : 40)\cdot 100\%$

$= 0{,}55 \cdot 100\% = 55\%$

γ) Η διάμεσος δ των $x_1, x_2, \dots, x_{40}$, είναι το ημιάθροισμα της 20ής και της 21ης παρατήρησης, δηλαδή:

$\delta = \frac{3+3}{2} = 3\,°C$, αφού αυτή αποτελεί τη μέση τιμή των δύο μεσαίων παρατηρήσεων του πλήθους των (σε αύξουσα σειρά), που είναι άρτιος.

δ) Σύμφωνα με τους τύπους:

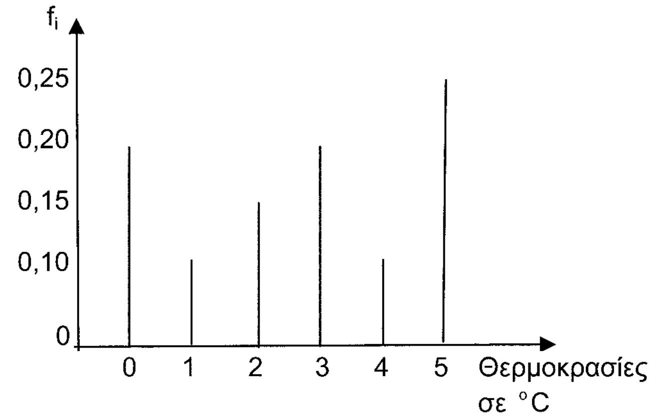
$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ και $\alpha_i = f_i \cdot 360°$, $i = 1,2,3,4,5,6$ έχουμε:

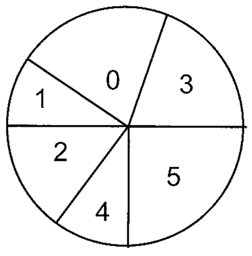
$f_1 = 0{,}2$, $f_2 = 0{,}1$, $f_3 = 0{,}15$, $f_4 = 0{,}2$, $f_5 = 0{,}1$,

$f_6 = 0{,}25$, $\alpha_1 = f_1 \cdot 360° = 72°$, $\alpha_2 = 36°$, $\alpha_3 = 54°$,

$\alpha_4 = 72°$, $\alpha_5 = 36°$, $\alpha_6 = 90°$

Συνεπώς, κατασκευάζουμε το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων καθώς και το κυκλικό διάγραμμα αυτών:





Κυκλικό διάγραμμα