ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΛΥΒΑΣ
ΙΩΑΝΝΑ ΚΟΣΚΙΝΑ
ΚΩΣΤΑΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΖΑΜΠΕΛΗΣ
ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΣ

Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A=[\alpha,\beta]$
Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα $x_0\in(\alpha,\beta)$, τότε:
$f(\alpha)<0$ και $f(x)>0$
για κάθε $x\in(x_0,\beta]$

ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $f^3(x)+2f(x)=3-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

Α. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Β. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Γ. Αν $x\in K=[0,+\infty)$, τότε $f(K)=(-\infty,1]$

Λύση

Α. Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$. Ισχύει $f^3(x)+2f(x)=3-x$, (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε και για $x_0\in\mathbb{R}$, με $x\neq x_0$ θα ισχύει $f^3(x_0)+2f(x_0)=3-x_0$, (2). Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1),(2) και έχουμε: $f^3(x)+2f(x)-f^3(x_0)-2f(x_0)=3-x-3+x_0\Leftrightarrow f^3(x)-f^3(x_0)+2(f(x)-f(x_0))=-(x-x_0)$,

επομένως: $(f(x)-f(x_0))(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0))+2(f(x)-f(x_0))=-(x-x_0)\Leftrightarrow$

$(f(x)-f(x_0))(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2)=-(x-x_0)$, (3). Είναι $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2\geq 2$, επειδή $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\geq 0$ (αφού ως τριώνυμο ως προς $f(x)$, έχει $\Delta=-3f^2(x_0)\leq 0$)

Η (3) γράφεται: $f(x)-f(x_0)=\dfrac{-(x-x_0)}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}$, οπότε έχουμε

$|f(x)-f(x_0)|=\dfrac{|x-x_0|}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}\leq\dfrac{|x-x_0|}{2}$, ισοδύναμα $|f(x)-f(x_0)|\leq\dfrac{|x-x_0|}{2}$.

Συνεπώς: $-\dfrac{|x-x_0|}{2}\leq f(x)-f(x_0)\leq\dfrac{|x-x_0|}{2}$, όπου όμως $\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)=0$,

άρα και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|x-x_0|}{2}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\dfrac{|x-x_0|}{2}\right)=0$, έτσι, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Β. Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$ και $f(x_1)\leq f(x_2)$

Από $f(x_1)\leq f(x_2)$ έχουμε $f^3(x_1)\leq f^3(x_2)$, επομένως $f^3(x_1)+2f(x_1)\leq f^3(x_2)+2f(x_2)$, (4)

Όμως $x_1<x_2$, ισοδύναμα $-x_1>-x_2$, οπότε $3-x_1>3-x_2$, απ΄ όπου: $f^3(x_1)+2f(x_1)>f^3(x_2)+2f(x_2)$, που είναι άτοπο λόγω της (4). Συνεπώς για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$, έχουμε $f(x_1)>f(x_2)$, δηλαδή, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

<u>Άλλος τρόπος για την μονοτονία της f</u>: Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$ ισχύουν $f^3(x_1)+2f(x_1)=3-x_1$ και $f^3(x_2)+2f(x_2)=3-x_2$, που με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει $f^3(x_1)-f^3(x_2)+2(f(x_1)-f(x_2))=-x_1+x_2$ ισοδύναμα $(f(x_1)-f(x_2))(f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+2)=-(x_1-x_2)$,(5)

Είναι $f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+2\geq 2$, επειδή $f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)\geq 0$ (αφού ως τριώνυμο ως προς $f(x_1)$, έχει $\Delta=-3f^2(x_2)\leq 0$) και $-(x_1-x_2)>0$, άρα από (5): $f(x_1)-f(x_2)>0$, δηλαδή $f(x_1)>f(x_2)$, έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Γ. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (από Α), άρα και στο Κ. Ακόμη f γνησίως φθίνουσα στο Κ(ως γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$), επομένως $f(K)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\ f(0)\right]$. Για $x=0$, από (1) έχουμε $f^3(0)+2f(0)=3\Leftrightarrow f^3(0)+2f(0)-3=0\Leftrightarrow$ $f^3(0)-1+2(f(0)-1)=0\Leftrightarrow(f(0)-1)(f^2(0)+f(0)+3)=0$ με $f^2(0)+f(0)+3>0$ (αφού ως τριώνυμο ως προς $f(0)$, έχει $\Delta=-11<0$), άρα $f(0)=1$. Για $x=3$ η (1) δίνει $f^3(3)+2f(3)=0$, άρα $f(3)(f^2(3)+2)=0$, οπότε $f(3)=0$ (αφού $f^2(3)+2>0$). Για $x>3$ είναι (f γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$) $f(x)<f(3)\Leftrightarrow f(x)<0$

Από $f^3(x)+2f(x)=3-x$ έχουμε $f(x)=\dfrac{3-x}{f^2(x)+2}\leq\dfrac{3-x}{2}$ (αφού $f^2(x)\geq 0$), οπότε $\dfrac{2}{3-x}\leq\dfrac{1}{f(x)}<0$, (6)

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-x}{2}=-\infty$, άρα από (6) και το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$, επομένως

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\infty$. Συνεπώς $f(K)=(-\infty,1]$

Θέμα 2°

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αν ισχύουν: $f(2011) = 3$, $f(2012) = 12$ και $\dfrac{f(f(x))}{f(f(x)+3)} = \dfrac{f(f(x)+4)}{f(f(x)+2)}$, (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $f(4)f(6) = f(7)f(8)$

β. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in [4, 6]$, τέτοιο ώστε $f^2(\rho) = f(4)f(6)$

γ. Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1−1 στο $\mathbb{R}$

δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2011, 2012]$ και $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [2011, 2012]$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [2011, 2012]$, τέτοιο ώστε $9f(x_0) = f(\xi_1) + 2f(\xi_2) + 6f(\xi_3)$

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε διατηρεί το πρόσημό της στο $\mathbb{R}$

Αλλά, $f(2011) = 3 > 0$, επομένως: $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α. Η f είναι συνεχής στο $[2011, 2012]$ και $f(2011) = 3$, $f(2012) = 12$, άρα $f(2011) \neq f(2012)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών. Συνεπώς, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2011, 2012)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 4$, αφού $f(2011) < 4 < f(2012)$

Η σχέση (1), για $x = \xi$, γίνεται: $\dfrac{f(f(\xi))}{f(f(\xi)+3)} = \dfrac{f(f(\xi)+4)}{f(f(\xi)+2)}$, οπότε, $\dfrac{f(f(\xi))}{f(f(\xi)+3)} = \dfrac{f(f(\xi)+4)}{f(f(\xi)+2)} \Leftrightarrow \dfrac{f(4)}{f(7)} = \dfrac{f(8)}{f(6)} \Leftrightarrow$

$f(4)f(6) = f(7)f(8)$

β. Θεωρούμε $g(x) = f^2(x) - f(4)f(6)$, $x \in [4, 6]$, οπότε, $f^2(\rho) = f(4)f(6) \Leftrightarrow f^2(\rho) - f(4)f(6) = 0$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\rho \in [4, 6]$

- Η g είναι συνεχής στο $[4, 6]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (f^2 συνεχής, $f(4)f(6)$ σταθερή)
- $g(4) = f^2(4) - f(4)f(6) = f(4)[f(4) - f(6)]$, $g(6) = f^2(6) - f(4)f(6) = f(6)[f(6) - f(4)]$

Έτσι, $g(4) \cdot g(6) = -f(4)f(6) \cdot [f(4) - f(6)]^2 \leq 0$, διότι $-f(4)f(6) < 0$ και $[f(4) - f(6)]^2 \geq 0$. Τότε:

i) αν $g(4) \cdot g(6) = 0$, ισοδύναμα έχουμε $g(4) = 0$, ή $g(6) = 0$, δηλαδή $\rho = 4$, ή $\rho = 6$

ii) αν $g(4) \cdot g(6) < 0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (4, 6)$, τέτοιο ώστε $g(\rho) = 0$

Συνεπώς, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in [4, 6]$, τέτοιο ώστε $g(\rho) = 0$

γ. Θεωρούμε $\varphi(x) = f^2(x) - f(7)f(8)$, $x \in [7, 8]$, οπότε, ομοίως με το β. ερώτημα, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mu \in [7, 8]$, τέτοιο ώστε $\varphi(\mu) = 0$, ισοδύναμα $f^2(\mu) = f(7)f(8)$

Όμως, $f^2(\rho) = f(4)f(6)$ (όπως ισχύει από το ερώτημα β.), που επειδή ισχύει $f(4)f(6) = f(7)f(8)$ (από το ερώτημα α.), παίρνουμε $f^2(\rho) = f^2(\mu) \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(\rho) = f(\mu)$, με $\rho \in [4, 6]$ και $\mu \in [7, 8]$, επομένως η f δεν είναι 1−1 στο $\mathbb{R}$

δ. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta = [2011, 2012]$, η εικόνα του Δ είναι:

$f(\Delta) = [f(2011), f(2012)] = [3, 12]$

Τότε θα ισχύουν: $3 \leq f(\xi_1) \leq 12$, $3 \leq f(\xi_2) \leq 12$ και $3 \leq f(\xi_3) \leq 12$, ισοδύναμα:

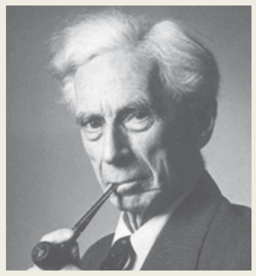
$3 \leq f(\xi_1) \leq 12$, $6 \leq 2f(\xi_2) \leq 24$ και $18 \leq 6f(\xi_3) \leq 72$, όπου προσθέτοντας κατά μέλη τις τελευταίες, παίρνουμε:

$27 \leq f(\xi_1) + 2f(\xi_2) + 6f(\xi_3) \leq 108 \Leftrightarrow 3 \leq \dfrac{f(\xi_1) + 2f(\xi_2) + 6f(\xi_3)}{9} \leq 12$

Αν $\dfrac{f(\xi_1) + 2f(\xi_2) + 6f(\xi_3)}{9} = \eta$, τότε $\eta \in [3, 12] = f(\Delta)$, επομένως από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, υπάρχει ένα $x_0 \in [2011, 2012]$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta \Leftrightarrow 9f(x_0) = f(\xi_1) + 2f(\xi_2) + 6f(\xi_3)$

ΒΙΟΓΡΑΦΙΕΣ

Μπέρτραντ Ράσελ (1872-1970)



Κορυφαίος Άγγλος φιλόσοφος και μαθηματικός, ίσως η πιο αντιπροσωπευτική μορφή στον συνδυασμό αυτών των δύο επιστημονικών χώρων. Ούτε ως φιλόσοφος ούτε ως μαθηματικός δίδαξε για πολύ από πανεπιστημιακή έδρα. Οι σοσιαλιστικές ιδέες του τον οδήγησαν στην πόρτα εξόδου του Κέμπριτζ, όπου είχε καταφέρει να γίνει λέκτορας οικονομικών σπουδών. Αργότερα μάλιστα φυλακίστηκε. Απτόητος συνέχισε, πάντως, να κάνει διαλέξεις και να γράφει από το 1920 έως τα παρά κάτι 100 του χρόνια εναντίον του ναζισμού και του φασισμού, εναντίον του σταλινισμού, εναντίον του πυρηνικού ολέθρου. Εξάλλου, μαζί με τον Σαρτρ και άλλους διανοούμενους ίδρυσαν στη Στοκχόλμη το Διεθνές Δικαστήριο Εγκληματιών Πολέμου του Βιετνάμ... Ανάμεσα στα περίπου 40 έργα του, δεσπόζουσα θέση έχουν και αυτά που υπηρέτησαν τη μαθηματική επιστήμη. Ξεχωρίζουν το τρίτομο μνημειώδες έργο στον χώρο της λογικής «Μαθηματικές Αρχές» και ακόμα τα: «Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών», «Μια κριτική έκθεση της φιλοσοφίας του Λάιμπνιτς»... Στον χώρο των Μαθηματικών το όνομα του Ράσελ συνδέθηκε με την αναγωγή της συγκεκριμένης επιστήμης στη Λογική. «Η Λογική είναι η νεότητα των Μαθηματικών και τα Μαθηματικά είναι η ωριμότητα της Λογικής» έλεγε ο ίδιος. Στον χώρο της φιλοσοφίας έμεινε ως ο επαναστάτης θεωρητικός του ρεαλισμού, «των λογικών κατασκευών», του «λογικού ατομισμού», της μαθηματικής ανάλυσης της συμπεριφοράς των όντων...