



ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤ. / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΑΠΟΦΟΙΤΟΙ
ΣΕΙΡΑ:	ΧΕΙΜΕΡΙΝΑ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	20/11/11

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

A₁. Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ **(Μονάδες 8)**

A₂. Ποιες οι δυνατές τιμές της δύναμης i^n , για τις διάφορες τιμές του φυσικού αριθμού n ;

(Μονάδες 3)

A₃. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1 – 1;

(Μονάδες 4)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$, όπου z_0 σταθερός μιγαδικός αριθμός, παριστάνει το κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ

β. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$

γ. Για τη συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$, η οποία είναι 1 – 1 στο A , ισχύει η ισότητα: $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x))$, $x \in A$

δ. Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει η ισοδυναμία: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$

ε. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο A , τότε είναι 1-1 σ' αυτό και αντιστρόφως.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ο μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει: $|2iz - 2 - 6i| = 2|z - 5 - 3i|$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων M του z

(Μονάδες 9)

β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$

(Μονάδες 6)

γ. Να βρείτε το μιγαδικό z με το ελάχιστο μέτρο.

(Μονάδες 10)





ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της $g \circ f$ (Μονάδες 6)
- β. Να δείξετε ότι η $g \circ f$ είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 6)
- γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z για τους οποίους ικανοποιείται η εξίσωση $(g \circ f)(|z|) = (g \circ f)(|2z+1|)$, (1) (Μονάδες 8)
- δ. Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 ικανοποιούν την εξίσωση (1), να βρείτε την μέγιστη τιμή της παράστασης $|z_1 - z_2|$ (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 2 - x - x^5$

- α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (Μονάδες 4)
- β. Να υπολογίσετε το $f^{-1}(2)$ (Μονάδες 5)
- γ. Αν $f^{-1}(2) = 0$, να λύσετε την εξίσωση $f\left(f^{-1}\left(\frac{6-x}{2}\right) - \frac{x}{2}\right) = 2$ (Μονάδες 7)
- δ. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(38 - f(x^2 - 5x + 4)) < 0$ (Μονάδες 9)

Ευχόμαστε επιτυχία!!!

