



ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΕΙΡΑ:	1 ^η ΣΕΙΡΑ / ΘΕΡΙΝΑ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	20/11/11

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

A₁. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, n \in \mathbb{N}^+$ με πραγματικούς συντελεστές και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

(Μονάδες 7)

A₂. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 3)

A₃. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 5)

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε x κοντά στο x_0

β. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0

δ. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$

ε. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\varepsilon : y = x$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει: $xf(x) = \sqrt{x^2 + 12} - 2f(x) + \lambda$

α. Να δείξετε ότι $\lambda = -4$

(Μονάδες 4)

β. Να βρείτε τον τύπο της f

(Μονάδες 6)

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4f^2(x) - 10f(x) - |2f(x) - 5|}{\sqrt{2f(x) + 5} - 2}$

(Μονάδες 7)





δ. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ και να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - 3f(x)}{2f^2(x) + 4f(x) + 2}$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x) - 1}{x^2 - 4x} = 2 \text{ και } \frac{g(x)(x - 4)}{\sqrt{x + 5} - 3} \leq f(x) \leq \frac{3g(x)(x^2 - 6x + 8)}{\eta\mu(x - 4)} \text{ για } x \text{ κοντά στο } 4$$

α. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$ (Μονάδες 2)

β. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 6$ (Μονάδες 7)

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$ και

$$f(x) = \frac{(2\alpha - \beta)x^2 + (2\beta - 3\alpha)x - 5\alpha - \beta}{x^2 - 5x + 4}, \quad x \neq 1 \text{ και } x \neq 4, \text{ να βρείτε τις τιμές των } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 10)

δ. Αν $h(x) = \frac{5x + 2}{|g(x) - 1|}$ κοντά στο 4, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{h^2(x) + 2h(x) + 3} - \gamma \cdot h(x))$

για τις διάφορες τιμές του $\gamma \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 3f(x) - x = 5$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} (Μονάδες 7)

β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το τύπο της αντίστροφης.

(Μονάδες 4)

γ. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(Μονάδες 4)

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) \cdot \eta\mu(2011x)}{x^{2012}}$

(Μονάδες 5)

δ. Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(f(x^2 + 6x) + 1) = -1$

(Μονάδες 5)

Ευχόμαστε επιτυχία!!!

