ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΣΕΙΡΑ:	**1η ΘΕΡΙΝΑ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	**28/12/2011**

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

(Μονάδες 7)

Α2. Πότε μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

Α3. Πότε μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

Β. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή **(Σ)** ή λανθασμένη **(Λ)** καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho,\ \rho > 0$ όπου z_0 σταθερός μιγαδικός αριθμός, παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ.

β. Αν $f(x) = \alpha^x, 0 < \alpha \neq 1, x \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x) = x \cdot \alpha^{x-1}$

γ. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί το πρόσημό της σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε είναι 1 – 1 στο Δ.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2ο

Για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν: $|(1-i)\cdot z - 2| = 2$, $\left|\dfrac{w+2i}{w-2+4i}\right| = 1$

Τότε να βρείτε:

α. Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z **(Μονάδες 6)**

φροντιστήρια πουκαμισάς

β. Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w **(Μονάδες 7)**

γ. Την ελάχιστη τιμή του $|w|$ **(Μονάδες 6)**

δ. Την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$\eta\mu^2 x - x^3 \le x\cdot f(x) \le \eta\mu^2 x + x^3,\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{2-x}=1$$

α. Να δείξετε ότι $f(0)=0$ **(Μονάδες 7)**

β. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=x$ εφάπτεται στην C_f στο $O(0,0)$ **(Μονάδες 8)**

γ. Αν $g(x)=f(x)-x+1,\ x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η C_g και η ε έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,2)$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής και 1 – 1 στο $[0,8]$ για την οποία ισχύουν:

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+3}{x^2-4}=\frac{1}{2}$, η C_f εφάπτεται της ευθείας $y=4x-12$ στο σημείο με τετμημένη $x_0=3$ και $f(2)\cdot f(4)\cdot f(1)=60$. Να αποδείξετε ότι:

α. **i)** Η $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την x_0 **(Μονάδες 4)**

ii) $f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,3)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(3,8]$ **(Μονάδες 6)**

β. Η C_f τέμνει την ευθεία $y=-2$ σε μοναδικό σημείο με τετμημένη στο $(2,3)$

(Μονάδες 3)

γ. Υπάρχει x_1, ώστε $f(x_1)+x_1=f'(3)$ **(Μονάδες 4)**

δ. Υπάρχει $x_2\in[0,3)$, ώστε $f(x)\ge f(x_2)$ για κάθε $x\in[0,8]$ **(Μονάδες 5)**

ε. $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(2)\cdot x^{2012}+5x^{2011}-7}{f(6)x^{1961}+x^{28}+4x^3-1}=+\infty$ **(Μονάδες 3)**

Ευχόμαστε επιτυχία!!!