



ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΕΙΡΑ:	ΧΕΙΜΕΡΙΝΑ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	28/12/2011

ΘΕΜΑ 1^ο

A₁. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0, v \in \mathbb{N}^*$ με πραγματικούς συντελεστές και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

(Μονάδες 8)

A₂. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 3)

A₃. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

B. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0

β. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0

γ. Ισχύει ότι $\bar{z} = z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$

δ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών ισούται με την απόσταση των εικόνων τους.

ε. Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε η f δεν μηδενίζεται στο $[\alpha, \beta]$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Για τους μιγαδικούς z και w ισχύουν: $|z - 1 - 4i| = 2, |w + 2| = |w - 2 + 8i|$

Τότε να βρείτε:

α. Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

(Μονάδες 6)

β. Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w

(Μονάδες 7)





- γ. Την ελάχιστη τιμή του $|w|$ (Μονάδες 6)
- δ. Την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$ (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{g(x) - 1}{x^2 - 4x} = 2 \text{ και } \frac{g(x)(x - 4)}{\sqrt{x + 5} - 3} \leq f(x) \leq \frac{3g(x)(x^2 - 6x + 8)}{\eta\mu(x - 4)}, \text{ για } x \text{ κοντά στο } 4$$

- α. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$ (Μονάδες 4)
- β. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 6$ (Μονάδες 9)
- γ. Αν $h(x) = \frac{5x + 2}{|g(x) - 1|}$ κοντά στο 4, να βρείτε τα όρια:
- i) $\lim_{x \rightarrow 4} h(x)$ (Μονάδες 4)
- ii) $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{h^2(x) + 2h(x) + 3} - h(x))$ (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} τέτοια ώστε: $f^2(x) = x^2 - 7x + 16, x \in \mathbb{R}$

- α. Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ (Μονάδες 3)
- β. Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 + f(x)}{x - 3} = -2$
- i) Να δείξετε ότι $f(x) = -\sqrt{x^2 - 7x + 16}, x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 8)
- ii) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(x))$ (Μονάδες 8)
- iii) Να βρείτε τον $a \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f^2(x) - 2ax}{x - 4} = \lambda \in \mathbb{R}$ καθώς και την τιμή του ορίου λ .

(Μονάδες 6)

Ευχόμαστε επιτυχία!!!