

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (1η σειρά)

ΘΕΜΑ 1°

- A.** Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι $F'(x) = f'(x) + g'(x)$ **(Μονάδες 8)**
- B.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο x_0 του πεδίου ορισμού της και τι ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 ; **(Μονάδες 7)**
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο x_0 είναι ο αριθμός $f'(x_0)$
- β.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sin x$. Είναι $(\sin x)' = \eta \mu x$
- γ.** Ισχύει $(\ln 3)' = \frac{1}{3}$
- δ.** Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t , τότε η ταχύτητα του είναι $u(t) = x'(t)$
- ε.** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Delta=(\alpha, \beta)$. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ . **(Μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + 10$ με $a \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(1) + f'(1) = -1$$

- α.** Να αποδείξετε ότι $a = -7$ **(Μονάδες 5)**
- β.** Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{2f'(x) - 3f''(x)}$ **(Μονάδες 7)**
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f :

- i) στο σημείο $M(3, f(3))$ (Μονάδες 6)
- ii) που είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = 5x + 2011$ (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \lambda x}{x^2 - x - 2} + \frac{1}{3}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f (Μονάδες 2)
- β. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της f (Μονάδες 5)
- γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει :
- i) Δύο ακρότατα όταν $\lambda \in (-2, -1) \cup (-1, 1)$ (Μονάδες 4)
- ii) Ένα ακρότατο όταν $\lambda = -1$ (Μονάδες 4)
- δ. Για $\lambda = -1$, να βρείτε:
- i) Τη θέση και το είδος του ακροτάτου, (Μονάδες 6)
- ii) Την τιμή του α , αν η τιμή του ακροτάτου ισούται με $\frac{10}{9}$ (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = k \ln x - x^2$ για την οποία ισχύει $f'(4) = -6$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 8)
- β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)
- γ. Αν $\alpha > \beta > 2$, να αποδείξετε ότι: $\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^8 < \alpha^2 - \beta^2$ (Μονάδες 5)
- δ. Να αποδείξετε ότι $\ln \frac{x}{2} \leq \frac{x^2 - 4}{8}$, για κάθε $x > 0$ (Μονάδες 4)

Ευχόμαστε επιτυχία!!!

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ (2η σειρά)

ΘΕΜΑ 1°

- A.** Έστω η συνάρτηση $F(x)=c \cdot f(x)$. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι $F'(x) = cf'(x)$ (Μονάδες 8)
- B.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 7)
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός.
- β.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Είναι $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
- γ.** Ισχύει $(\sqrt{2})' = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
- δ.** Η ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης θέσης $S(t)$ του κινητού, την στιγμή t_0
- ε.** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Delta=(\alpha,\beta)$. Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + 5$ με $a \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(-1) - f'(-1) = 20$$

- α.** Να αποδείξετε ότι $a = -6$ (Μονάδες 5)
- β.** Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{f'(x) - 2f''(x)}$ (Μονάδες 7)

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f:

i) Στο σημείο $M(4, f(4))$

(Μονάδες 6)

ii) Που είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = -4x + 2012$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \lambda x + 4}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{2}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

(Μονάδες 2)

β. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της f

(Μονάδες 5)

γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει:

i) Δύο ακρότατα όταν $\lambda \in (-\infty, -5) \cup (-4, -3) \cup (-3, +\infty)$

(Μονάδες 4)

ii) Ένα ακρότατο όταν $\lambda = -3$

(Μονάδες 4)

δ. Για $\lambda = -3$, να βρείτε:

i) Τη θέση και το είδος του ακροτάτου.

(Μονάδες 6)

ii) Την τιμή του α αν η τιμή του ακροτάτου ισούται με -5

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - kx^2$ για την οποία ισχύει $f'(2) = -\frac{3}{2}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και την τιμή του $k \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 8)

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 8)

γ. Αν $\alpha > \beta > 2$, να αποδείξετε ότι: $\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \alpha^2 - \beta^2$

(Μονάδες 5)

δ. Να αποδείξετε ότι $\ln x \leq \frac{x^2 - 1}{2}$ για κάθε $x > 0$

(Μονάδες 4)

Ευχόμαστε επιτυχία!!!

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A₁.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$, είναι $f'(x) = 1$ (Μονάδες 10)
- A₂.** Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (Μονάδες 5)
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Ισχύει πάντα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- β.** Για τις συναρτήσεις f και g ισχύει πάντα ότι:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ με $x_0 \in D_f$ και $x_0 \in D_g$
- γ.** Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ είναι πραγματικός αριθμός.
- δ.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$. Τότε για $x_0 \in A$ ισχύει πάντα η ισότητα: $f'(x_0) = (f(x_0))'$
- ε.** Ισχύει ότι $(e^x)' = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(-x^2 + 2x) + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 5)
- β.** Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ (Μονάδες 7)
- γ.** Να βρείτε τα α, β ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$ και να ισχύει $f'(1) = 2$ (Μονάδες 8)
- δ.** Για $\alpha=2$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f'(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\text{Δίνεται η συνεχής συνάρτηση } f \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x^2 + x - 5}{\kappa(x-1)}, & x \neq 1 \\ \frac{\kappa}{10}, & x = 1 \end{cases}, \text{ όπου } \kappa \in (-\infty, 0)$$

$$\text{και η συνάρτηση } g \text{ με } g(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x+5} - 3}$$

α. i) Να υπολογίσετε τη τιμή του κ (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g (Μονάδες 4)

β. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$ (Μονάδες 6)

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$ (Μονάδες 5)

$$\gamma. \text{ Εξετάστε αν η συνάρτηση } h(x) = \begin{cases} g(x), & x < 4 \\ \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 + 2t - 8}{t^3 - 8}, & x = 4 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x = 4$ (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2 - x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$. Αν η εξίσωση $f'(x) = -2$ έχει λύση την $x = 1$, τότε:

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των α, β

(Μονάδες 8)

β. Για $\alpha = 2, \beta = 2$ να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x) - 2}{x - 1}$ (Μονάδες 3)

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{\frac{f''(x) - 2}{6}} - 1}{x^2 - 4} \right)$ (Μονάδες 6)

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{g'(x)}{e^x} = x^3 + 3x^2 + 4x - 4$, όπου $g(x) = e^x f(x)$ (Μονάδες 8)

Ευχόμαστε επιτυχία!!!