
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

12:20



φροντιστήρια
ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ

Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 10/06/2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: *Μαθηματικά ΟΠ Θετικών Σπουδών & Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής*

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1.

α) Εστω A ένα υποσυνολο του \mathbb{R} . Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$

ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 15

β)

i. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι 1-1.

ii. Η αντίστροφη συνάρτηση της f που συμβολίζεται με f^{-1} ορίζεται από τη σχέση :

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

ΣΧΟΛΙΚΟ ΣΕΛ 35-36

A2.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

A3.

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\zeta \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\zeta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ οπότε έχουμε } f(x_2) - f(x_1) = f'(\zeta)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\zeta) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

A4.

α) ΛΑΘΟΣ

ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι αν και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

β) ΛΑΘΟΣ

ισχύει αν και μόνο αν η f συνεχής στο x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

A5. γ)

ΘΕΜΑ Β

B1.

Αφού η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=2$

Θα έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

B2.

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - x, x \in [2, 3]$

$$g(x) = e^{-x} + 2 - x$$

Η g συνεχής στο $[2, 3]$ ως πράξεις συνεχών και

$$g(2) = e^{-2} > 0$$

$$g(3) = -1 + e^{-3} < 0$$

Αρα $g(2) \cdot g(3) < 0$ από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0$$

Είναι η g παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = (e^{-x} + 2 - x)' = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1) < 0, x \in [2, 3]$$

Αρα η g γνησίως φθίνουσα άρα 1-1 έπεται x_0 μοναδική ρίζα στο $(2, 3)$

B3.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (e^{-x} + 2)' = -e^{-x} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αρα η f γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} άρα 1-1 άρα υπάρχει η $f^{-1}(x)$

$$\text{Είναι } f(D_f) = f(\mathbb{R}) \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (2, +\infty)$$

Θέτουμε $y = f(x), x \in \mathbb{R}, y \in (2, +\infty)$

$$y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow e^{-x} = y - 2 \Leftrightarrow -x = \ln(y - 2) \Leftrightarrow x = -\ln(y - 2)$$

Είναι $f^{-1}(y) = -\ln(y - 2)$ άρα

$$f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), x > 2$$

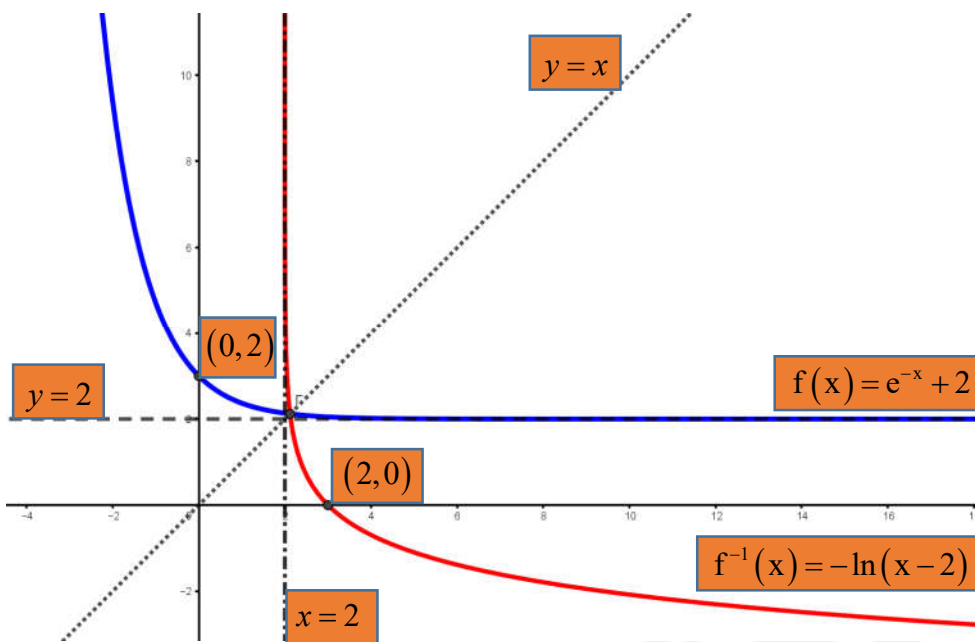
B4.

Για την κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ εξετάζουμε στο $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)]$$

Θέτουμε $u = x - 2$ καθώς $x \rightarrow 2^+, u \rightarrow 0^+$ επομένως $\lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)] = -\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = +\infty$

Άρα η $x = 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$



Η γραφική παράσταση της f με $f(x) = e^{-x} + 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της καμπύλης της φ με $\varphi(x) = e^{-x}$ κατά δύο μονάδες προς τα πάνω, όπου η καμπύλη της φ είναι η συμμετρική της e^x ως προς τον άξονα $y'y$.

Η γραφική παράσταση της f^{-1} με $f^{-1} = -\ln(x-2)$ προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της καμπύλης της h με $h(x) = -\ln x$ κατά δύο μονάδες προς τα δεξιά, όπου η καμπύλη της h είναι η συμμετρική της $\ln x$ ως προς τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$$

Γ1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής. Άρα η f θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$.

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \alpha) = 1 + \alpha = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = 1 + \beta$$

$$\text{Άρα } 1 + \alpha = 1 + \beta \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \beta}$$

Επίσης η f θα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \alpha}{x - 1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta)'}{(x - 1)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta}{1} = 1 + \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - 1 - \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

$$\text{Άρα: } 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1} \text{ και έτσι } \boxed{a = 1}$$

$$\mathbf{\Gamma 2.} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$$

Αν $x < 1$ τότε $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$, για κάθε $x < 1$

Αν $x > 1$ τότε $f'(x) = 2x > 0$ για κάθε $x > 1$

Η f συνεχής στο $A_f = \mathbb{R}$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $A_f = \mathbb{R}$

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty \quad \text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

Οπότε $f(A) = \mathbb{R}$

$\mathbf{\Gamma 3.}$ f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και συνεχής

$$f((-\infty, 0]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right) = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right]$$

Το $0 \in \left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$ άρα υπάρχει $x_0 < 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ και είναι μοναδικό αφού $f \nearrow$ στο A_f .

Οπότε η f είναι 1-1

II) Όπως αποδείξαμε $f(x_0) = 0$ με $x_0 < 0$

Η εξίσωση (E) $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot [f(x) - x_0] = 0$

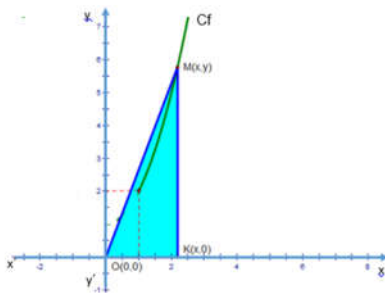
Θα δείξουμε ότι η (E) είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

Αφού $f(x_0) = 0$ και $f \nearrow$ στο \mathbb{R} άρα για κάθε $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) = 0$

$f(x) > 0 > x_0$ άρα $f(x) - x_0 > 0$, $f(x) \cdot [f(x) - x_0] > 0$ για κάθε $x > x_0$

Άρα η (E) $f(x) \cdot [f(x) - x_0] = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

Γ4.



Αν $x \geq 1 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 1$

$$(OKM) = \frac{1}{2}(OK)(KM) = \frac{1}{2}|x(t)||y(t)| = \frac{1}{2}x(t)[x^2(t) + 1] = \frac{1}{2}[x^3(t) + x(t)]$$

Αφού $x(t) \geq 1 > 0$ και $y(t) > 0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $E(t) = \frac{1}{2}[x^3(t) + x(t)]$ με $x(t) \geq 1$

$$E'(t) = \frac{1}{2}[3x^2(t)x'(t) + x'(t)]$$

Για $t = t_0$ όπου $x'(t_0) = 2$ και $x(t_0) = 3$ έχουμε

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}[3x^2(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)] = \frac{1}{2}[3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 2] = 28 \text{ τμ/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow a + \beta = 1$$

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + a$$

$$f'(1) = -1 \Leftrightarrow a = -1$$

$$a + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 - a = 2$$

Δ2.

$$f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2, x \in R$$

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{(x^2 - 2x + 2)} - 1, x \in R$$

$$E = \int_1^2 |f(x) - (-x + 2)| dx = \int_1^2 (f(x) + x - 2) dx, \text{ γιατί:}$$

$$f(x) + x - 2 = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) = (x-1) \cdot \ln[(x-1)^2 + 1] > 0$$

για κάθε $x > 1$.

$$\text{Άρα } E = \int_1^2 [(x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2)] dx$$

θέτουμε $u = x^2 - 2x + 2, du = 2(x-1)$ και

$u_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1, u_2 = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2$. οπότε:

$$E = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 (u)' \ln u du = \frac{1}{2} \left([u \cdot \ln u]_1^2 - \int_1^2 u \cdot (\ln u)' du \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 \ln 2 - \int_1^2 1 du \right) = \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1) = \ln 2 - \frac{1}{2} \tau\mu$$

Δ3.

(i)

$$f'(x) \geq -1, x \in R$$

$$\ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$$

που ισχύει για κάθε $x \in R$, γιατί:

$$\ln(x^2 - 2x + 2) = \ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0 \quad \text{και} \quad \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} = \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0, x \in R.$$

(ii)

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq f(\lambda) + \lambda - 2 + \frac{3}{2}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}. \text{ Για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda < \lambda + \frac{1}{2}.$$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\lambda, \lambda + \frac{1}{2})$,

Από Θ.Μ.Τ. θα υπάρξει $\xi \in (\lambda, \lambda + \frac{1}{2})$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - \lambda} = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

Από Δ3(i) έχουμε ότι : $f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα θα είναι και $f'(\xi) \geq -1$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

Δ4.

Έστω $K(\alpha, f(\alpha))$ τυχαίο σημείο της C_f και $\Lambda(\beta, g(\beta))$ τυχαίο σημείο της C_g

$$g'(x) = -3x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Πρέπει } f'(\alpha) = g'(\beta) \Leftrightarrow \ln(a^2 - 2a + 2) + \frac{2(a-1)^2}{a^2 - 2a + 2} - 1 = -3\beta^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(a^2 - 2a + 2) + \frac{2(a-1)^2}{a^2 - 2a + 2} = -3\beta^2 \text{ σχέση(1)}$$

$$\text{Επειδή } \ln(a^2 - 2a + 2) + \frac{2(a-1)^2}{a^2 - 2a + 2} \geq 0 \text{ και } -3\beta^2 \leq 0, \text{ η (1) ισχύει}$$

μόνο όταν $\alpha = 1$ και $\beta = 0$

οπότε η εφαπτομένη της C_f στο K θα είναι η $(\varepsilon_1) : y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

$$\Leftrightarrow y - 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

και η εφαπτομένη της C_g στο Λ θα είναι : $y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta)$

$$\Leftrightarrow y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Άρα η $y = -x + 2$ είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g .

Συμπληρωματικοί τρόποι επίλυσης

Θέμα Γ

Γ4. (β τρόπος)

Εξ υποθέσεως ισχύει $\frac{dx}{dt} = 2\mu/sec$

Ζητάμε το $\left. \frac{dE}{dt} \right|_{x=3}$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$E = \frac{1}{2}(OK)(KM) = \frac{1}{2}|x| \cdot |x^2 + 1| = \frac{1}{2}x(x^2 + 1) = \frac{1}{2}(x^3 + x) \text{ αφού } x \geq 1 > 0$$

$$\text{Άρα } \frac{dE}{dx} = \frac{1}{2}(3x^2 + 1)$$

$$\text{Άρα } \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}(3x^2 + 1) \cdot 2 = 3x^2 + 1$$

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{x=3} = 3 \cdot 3^2 + 1 = 28 \text{ } \mu/sec$$

Θέμα Δ

Δ4. (β τρόπος) Δείξαμε ότι $f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in R$

$$g(x) = -x^3 - x + 2, \quad x \in R \quad g'(x) = -3x^2 - 1, \quad x \in R$$

άρα $g'(x) \leq -1$ για κάθε $x \in R$

Έστω $M_1(x_1, f(x_1)), M_2(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής της ζητούμενης κοινής εφαπτομένης τότε θα ισχύει $f'(x_1) = g'(x_2)$

$$\text{Αλλά } f'(x_1) \geq -1 \text{ και } g'(x_2) \leq -1$$

Άρα η ισότητα θα ισχύει αν και μόνο αν $f'(x_1) = -1$ και $g'(x_2) = -1$

$$f'(x) > -1 \text{ για κάθε } x \in R - \{1\}$$

$g'(x) < -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

Άρα $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$ (Άρα $x_1 \neq x_2$)

Για $x_1 = 1$ έχουμε $\varepsilon_1 : y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$

Αντίστοιχα για $x_2 = 0$ $\varepsilon_2 : y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = -1x \Leftrightarrow y = -x + 2$

Άρα $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$

