ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (1η σειρά)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α) Βιβλίο σχολικό, σελ. 23, **β)** Βιβλίο σχολικό, σελ. 34-35
Β. α) Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Σ, **ε)** Σ

ΘΕΜΑ 2ο

i) $\overrightarrow{Β\Sigma}=4\overrightarrow{\Sigma\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{Α\Sigma}-\overrightarrow{ΑΒ}=4\overrightarrow{Α\Gamma}-4\overrightarrow{Α\Sigma}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{Α\Sigma}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+4\vec{\alpha}+12\vec{\beta}\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{Α\Sigma}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$

ii) $\overrightarrow{Α\Sigma}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, άρα $|\overrightarrow{Α\Sigma}|=|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|$, (1)

Όμως $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|2\vec{\beta}|\overset{(1)}{\Leftrightarrow}|\overrightarrow{Α\Sigma}|\le|\vec{\alpha}|+2|\vec{\beta}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{Α\Sigma}|\le 1+2\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow|\overrightarrow{Α\Sigma}|\le 2$

iii) $\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{\alpha}-\vec{\beta}\Leftrightarrow -2\vec{x}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\overset{i)}{\Leftrightarrow}-2\vec{x}=\overrightarrow{Α\Sigma}$, επομένως $\vec{x}\nearrow\swarrow\overrightarrow{Α\Sigma}$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. $\vec{x}=\vec{y}\Leftrightarrow(\kappa+1,\,2\lambda-3)=(1-\lambda,\,3-5\kappa)\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa+1=1-\lambda\\2\lambda-3=3-5\kappa\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=-\lambda\\2\lambda-5\lambda=6\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-2\\\kappa=2\end{cases}$

Β. Τα $\vec{u},\vec{v}$ είναι αντίρροπα, άρα και παράλληλα, οπότε $\det(\vec{u},\vec{v})=0\Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix}\mu & -2\\-1 & \mu+1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\mu(\mu+1)-2=0\Leftrightarrow\mu^2+\mu-2=0$ με λύσεις $\mu=1$, $\mu=-2$

Για $\mu=1$, $\vec{u}=(1,-2)$ και $\vec{v}=(-1,2)$ δηλ. τα $\vec{u},\vec{v}$ είναι αντίρροπα.
Για $\mu=-2$, $\vec{u}=(-2,-2)$ και $\vec{v}=(-1,-1)$ δηλ. τα $\vec{u},\vec{v}$ είναι ομόρροπα οπότε η τιμή $\mu=-2$ απορρίπτεται. Συνεπώς $\mu=1$

Γ. i) $\overrightarrow{ΑΒ}=\overrightarrow{ΟΒ}-\overrightarrow{ΟΑ}\Leftrightarrow\overrightarrow{ΑΒ}=\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})\Leftrightarrow\overrightarrow{ΑΒ}=-\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$

$\overrightarrow{Α\Gamma}=\overrightarrow{Ο\Gamma}-\overrightarrow{ΟΑ}\Leftrightarrow\overrightarrow{Α\Gamma}=\frac{5}{3}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}-(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})\Leftrightarrow\overrightarrow{Α\Gamma}=-\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\frac{4}{3}\vec{\beta}$

ii) Είναι $\overrightarrow{ΑΒ}=-\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Α\Gamma}=-\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\frac{4}{3}\vec{\beta}=\frac{1}{3}(-\vec{\alpha}+4\vec{\beta})$, οπότε:

$3\overrightarrow{Α\Gamma}=-\vec{\alpha}+4\vec{\beta}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{Α\Gamma}=\overrightarrow{ΑΒ}$, επομένως $\overrightarrow{ΑΒ}\parallel\overrightarrow{Α\Gamma}$, δηλαδή τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 4^{o}

i) Είναι $\overrightarrow{AB}=(2+4,\ 3-1)=(6,\ 2)$, $\overrightarrow{B\Gamma}=(-2-2,\ -5-3)=(-4,\ -8)$

και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-2+4,\ -5-1)=(2,\ -6)$

Έχουμε $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}6 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=-36-4=-40\neq 0$, επομένως $\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{A\Gamma}$

δηλαδή τα Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, συνεπώς σχηματίζουν τρίγωνο.

ii) $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left(\sqrt{36+4}\right)^2=40$, $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2=\left(\sqrt{16+64}\right)^2=80$, $\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\left(\sqrt{4+36}\right)^2=40$,

άρα $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=40+40=80=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2$, συνεπώς ισχύει το Π.Θ.

δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ($\widehat{A}=90^{o}$)

iii) Έστω $\overrightarrow{AB}-3\vec{i}-\left(2+\sqrt{3}\right)\vec{j}=\vec{u}$

Είναι: $\overrightarrow{AB}-3\vec{i}-\left(2+\sqrt{3}\right)\vec{j}=(6,\ 2)-3(1,\ 0)-\left(2+\sqrt{3}\right)(0,\ 1)=\left(3,-\sqrt{3}\right)$

άρα $\lambda_{\vec{u}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $\varepsilon\varphi\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και επομένως $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$ ή $\varphi=\dfrac{11\pi}{6}$

Όμως η τετμημένη του $\vec{u}$ είναι θετικός αριθμός και

η τεταγμένη του είναι αρνητικός αριθμός, συνεπώς: $\varphi=\dfrac{11\pi}{6}$

iv) Έστω $M(x,y)$, οπότε $\overrightarrow{AM}=(x+4,y-1)$. Ακόμη $\overrightarrow{B\Gamma}=(-4,\ -8)$

$\overrightarrow{AB}=(6,\ 2)$, $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}$ και $\overrightarrow{AB}+(-5,\ -1)=(1,\ 1)$, άρα

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{B\Gamma}+\left|\overrightarrow{MA}\right|\cdot\left(\overrightarrow{AB}+(-5,\ -1)\right)\Leftrightarrow$$

$$(x+4,y-1)=(-1,\ -2)+\left(\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}\right)\cdot(1,\ 1)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x+4=-1+\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}\\ y-1=-2+\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+5=\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}\\ y+1=\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y-4\\ y+1=\sqrt{y^2+(y-1)^2}\end{cases}$$

Η $y+1=\sqrt{y^2+(y-1)^2}$ για $y>-1$ είναι ισοδύναμη με την:

$(y+1)^2=\left[\sqrt{y^2+(y-1)^2}\right]^2\Leftrightarrow(y+1)^2=y^2+(y-1)^2$, άρα $y=0, y=4$,

συνεπώς η $x=y-4$ δίνει $x=-4$, $x=0$, άρα $M(-4,\ 0)$ που απορρίπτεται ή $M(0,\ 4)$ που είναι δεκτό.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (2η σειρά)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α) Βιβλίο σχολικό, σελ. 38, **β)** Βιβλίο σχολικό, σελ. 33

Β. α) Σ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Σ

ΘΕΜΑ 2ο

i) $\overrightarrow{BK}=5\overrightarrow{K\Gamma}\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{A\Gamma}-5\overrightarrow{AK}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AK}=3\vec{\alpha}-6\vec{\beta}+5\vec{\alpha}+30\vec{\beta}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AK}=\frac{4}{3}\vec{\alpha}+4\vec{\beta}=4\left(\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$

ii) $\overrightarrow{AK}=4\left(\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$, άρα $\left|\overrightarrow{AK}\right|=\left|4\left(\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\right|=4\left|\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|$, (1)

Όμως:

$4\left|\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|\le 4\left|\frac{1}{3}\vec{\alpha}\right|+4\left|\vec{\beta}\right|\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\left|\overrightarrow{AK}\right|\le\frac{4}{3}\left|\vec{\alpha}\right|+4\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AK}\right|\le\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}+4\cdot\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AK}\right|\le 2$

iii) $\vec{u}=\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\vec{u}=\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\Leftrightarrow\frac{4}{3}\vec{u}=4\left(\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\overset{i)}{\Leftrightarrow}\frac{4}{3}\vec{u}=\overrightarrow{AK}$, επομένως

$\vec{u}\nearrow\nearrow\overrightarrow{AK}$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. $\vec{x}=\vec{y}\Leftrightarrow(1-\kappa,\,2\lambda)=(2-4\lambda,\,2-\kappa)\Leftrightarrow\begin{cases}1-\kappa=2-4\lambda\\2\lambda=2-\kappa\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=4\lambda-1\\2\lambda=2-4\lambda+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2}\\\kappa=1\end{cases}$

Β. Τα $\vec{u},\vec{v}$ είναι ομόρροπα, άρα και παράλληλα, οπότε $\det(\vec{u},\vec{v})=0\Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix}\mu-2 & 2\\4 & \mu\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\mu(\mu-2)-8=0\Leftrightarrow\mu^2-2\mu-8=0$ με λύσεις $\mu=4$, $\mu=-2$

Για $\mu=4$, $\vec{u}=(2,\,2)$ και $\vec{v}=(4,\,4)$ δηλ. τα $\vec{u},\vec{v}$ είναι ομόρροπα.

Για $\mu=-2$, $\vec{u}=(-4,\,2)$ και $\vec{v}=(4,\,-2)$ δηλ. τα $\vec{u},\vec{v}$ είναι αντίρροπα οπότε η τιμή $\mu=-2$ απορρίπτεται. Συνεπώς $\mu=4$

Γ. i) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}-\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$

$\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\overrightarrow{A\Gamma}=5\vec{\alpha}-15\vec{\beta}-\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{A\Gamma}=4\vec{\alpha}-16\vec{\beta}$

ii) Είναι $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=4\vec{\alpha}-16\vec{\beta}=4\left(\vec{\alpha}-4\vec{\beta}\right)$, οπότε:

$\overrightarrow{A\Gamma}=4\overrightarrow{AB}$, επομένως $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{A\Gamma}$, δηλαδή τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 4^{ο}

i) Είναι $\overrightarrow{AB}=(-1-2,\,-2+3)=(-3,\,1)$, $\overrightarrow{B\Gamma}=(4+1,\,3+2)=(5,\,5)$
και $\overrightarrow{A\Gamma}=(4-2,\,3+3)=(2,\,6)$

Έχουμε $\det(\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}5 & 5\\ 2 & 6\end{vmatrix}=30-10=20\neq 0$, επομένως $\overrightarrow{B\Gamma}\not\parallel\overrightarrow{A\Gamma}$

δηλαδή τα A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά, συνεπώς σχηματίζουν τρίγωνο.

ii) $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left(\sqrt{9+1}\right)^2=10$, $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2=\left(\sqrt{25+25}\right)^2=50$, $\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\left(\sqrt{4+36}\right)^2=40$,

άρα $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=10+40=50=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2$, συνεπώς ισχύει το Π.Θ.

δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ($\widehat{A}=90^{o}$)

iii) Έστω $\overrightarrow{B\Gamma}-\vec{i}-\vec{j}=\vec{u}$

Είναι: $\overrightarrow{B\Gamma}-\vec{i}-\vec{j}=(5,\,5)-(1,\,0)-(0,\,1)=(4,\,4)$

άρα $\lambda_{\vec{u}}=1$, οπότε $\varepsilon\varphi\varphi=1$ και επομένως $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ή $\varphi=\frac{5\pi}{4}$

Όμως η τετμημένη του $\vec{u}$ και η τεταγμένη του είναι θετικοί αριθμοί,

συνεπώς: $\varphi=\frac{\pi}{4}$

iv) Έστω $M(x,y)$, οπότε $\overrightarrow{\Gamma M}=(x-4,y-3)$. Ακόμη $\overrightarrow{AB}=(-3,\,1)$

$\overrightarrow{A\Gamma}=(2,\,6)$, $\left|\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}-(2,\,5)=(0,\,1)$, άρα

$$\overrightarrow{\Gamma M}=\overrightarrow{AB}-\left|\overrightarrow{MB}\right|\cdot\left(\overrightarrow{A\Gamma}-(2,\,5)\right)\Leftrightarrow$$

$$(x-4,y-3)=(-3,\,1)-\left(\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}\right)\cdot(0,\,1)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x-4=-3\\ y-3=1-\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y-4=-\sqrt{4+(y+2)^2}\end{cases}$$

Η $y-4=-\sqrt{4+(y+2)^2}$ για $y<4$ είναι ισοδύναμη με την:

$(y-4)^2=\left(\sqrt{4+(y+2)^2}\right)^2\Leftrightarrow(y-4)^2=4+(y+2)^2$, άρα $y=\frac{2}{3}$,

συνεπώς $M\left(1,\,\frac{2}{3}\right)$