

---

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ  
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021

---

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

12:17



φροντιστήρια  
**ΠΟΥΚΑΜΙΣΣΑΣ**

Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 16 / 06 / 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: *Μαθηματικά ΟΠ*

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**ΘΕΜΑ Α**

A<sub>1</sub>. Σχολικό Βιβλίο Σελ.135

A<sub>2</sub>. Σχολικό Βιβλίο Σελ.51

A<sub>3</sub>. Σχολικό Βιβλίο Σελ.23

A<sub>4</sub>. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

**ΘΕΜΑ Β**

B1. Θέτουμε  $u = x + 1, x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$  άρα  $x = u - 1$ ,

$$f(u) = u \cdot e^{-(u-1)} \Leftrightarrow f(u) = u \cdot e^{1-u}, u \in \mathbb{R} \text{ επομένως } f(x) = x \cdot e^{1-x}, x \in \mathbb{R}$$

B2. Η f συνεχής ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως γινόμενο

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με  $f'(x) = (x \cdot e^{1-x})' = e^{1-x} - x e^{1-x} = (1-x) \cdot e^{1-x}$



$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-x) \cdot e^{1-x} > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (1-x) \cdot e^{1-x} < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x) \cdot e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Η f συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα η f γν. φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$  και γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 1]$

Η f εμφανίζει ολικό μέγιστο στο  $x_0 = 1$ , το  $f(1) = e^{1-1} = e^0 = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+		-
f			

**B3.** Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πράξεις παραγωγισίμων

$$f''(x) = (e^{1-x} - x \cdot e^{1-x})' = e^{1-x} (1-x)' - [x'e^{1-x} + xe^{1-x} (1-x)'] =$$

$$= -e^{1-x} - (e^{1-x} - xe^{1-x}) = -e^{1-x} - e^{1-x} + xe^{1-x} = (x-2)e^{1-x}$$

$$f''(x) > 0 \stackrel{e^{1-x} > 0}{\Leftrightarrow} x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$f''(x) < 0 \stackrel{e^{1-x} > 0}{\Leftrightarrow} x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

Η  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$ . Άρα η  $f$  κυρτή στο  $[2, +\infty)$  και κοίλη στο  $(-\infty, 2]$ .

Η  $f$  εμφανίζει σημείο καμπής στο  $x_1 = 2$  το σημείο καμπής είναι το  $(2, 2e^{-1})$ .

$$f(x) = x \cdot e^{1-x} \text{ με } A_f = \mathbb{R}.$$

Η  $f$  συνεχής  $A_f = \mathbb{R}$  επομένως δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{e^x} = 0$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ τότε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{D.L.H}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{e^x} = 0$$

Επομένως η ευθεία  $y=0$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  καθώς το  $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e}{e^x} = +\infty$$

Επομένως η  $f$  δεν έχει πλάγια η οριζόντια ασύμπτωτη καθώς το  $x \rightarrow -\infty$

**B4.i)**  $\Delta_1 = (-\infty, 1]$   $f \nearrow$

$\Delta_2 = (1, +\infty)$   $f \searrow$

$f$  συνεχής στο  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = \mathbb{R}$

$f(\Delta_1) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1]$  αφού

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot e}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x \cdot e \cdot \frac{1}{e^x} \right) = -\infty$

$(\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \ \& \ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0)$

$f(\Delta_2) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (0, 1)$

Το όριο έχει δειχθεί σε προηγούμενο ερώτημα.

Άρα  $f(\Delta) = (-\infty, 1] \cup (0, 1) = (-\infty, 1]$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'$		<b>+</b>	<b>-</b>
$f$		OM $f(1)=1$	

Από το σύνολο τιμών της  $f$  προκύπτει ότι:

Αν  $\lambda \leq 0$  η  $(\epsilon) : f(x)=\lambda$  έχει μία ρίζα

Αν  $0 < \lambda < 1$  η  $(\epsilon) : f(x)=\lambda$  έχει δυο ρίζες

Αν  $\lambda = 1$  η  $(\epsilon) : f(x)=\lambda$  έχει μια ρίζα την  $x=1$

Αν  $\lambda > 1$  η  $(\epsilon) : f(x)=\lambda$  έχει είναι αδύνατη

## ΘΕΜΑ Γ

Γ.1.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \alpha < -3$$

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sigma\upsilon\nu x) = 1$$

- Η  $f$  συνεχής στο  $x_0 = 0$
- Η  $f$  συνεχής στο  $(-\infty, 0)$  ως πολυωνυμική και συνεχής στο  $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$  ως τριγωνομετρική.

Άρα συνεχής στο  $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(\alpha x^2 - 3x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^2 - 3x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Συνεπώς η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$

Γ.2.

i) Η  $f$  συνεχής στο  $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$f(0) = 1$$

Συνεπώς δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

ii) Αν  $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  τότε  $f'(x) = -\eta\mu x$

Έστω  $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  με  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$0 < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa < \frac{3}{2} \text{ άρα } \kappa = 1$$

$$\text{Για } \kappa = 1: x = 1 \cdot \pi = \pi$$

Άρα υπάρχει μοναδικό  $\xi = \pi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  για το οποίο ισχύει  $f'(\xi) = 0$

Γ.3. Έστω σημείο  $A(x, f(x))$  με  $x < 0$  τέτοιο ώστε  $f'(x) = 0$

$$\text{Για } x < 0 \text{ η } f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$$

$$\text{Άρα } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (3\alpha) \cdot (-1) = 36 + 12\alpha$$

$$\text{Όμως } \alpha < -3 \Leftrightarrow 12\alpha < -36 \Leftrightarrow 12 + 36 < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$$

Άρα  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x < 0$ , άρα δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτόμενη της  $C_f$  να είναι παράλληλη στον  $x'x$ .

Γ.4. Για  $x < 0: f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1 < 0$  διότι  $\Delta < 0$  και  $3\alpha < 0$

$$\text{Για } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]: f'(x) = -\eta\mu x$$

- Για  $x \in (0, \pi)$  έχουμε  $\eta\mu x > 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$
- Για  $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$  έχουμε  $\eta\mu x < 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	0	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$3\alpha x^2 - 6x - 1$	-			
$-\eta\mu x$			-	+
$f'$	-		-	+
$f$		$\searrow$		$\nearrow$

T.ΕΛ.

T.ΜΕΓ.

Η  $f$  συνεχής στο  $A_f$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha x^3) = +\infty \text{ (διότι } \alpha < 0 \text{)}$$

$$f(\pi) = \text{συν}\pi = -1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Για το σύνολο τιμών της  $f$ :

$$f((-\infty, \pi]) = \left[ f(\pi), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty)$$

$$f\left(\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]\right) = \left[ f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] = [-1, 0]$$

Άρα  $f(A) = [-1, +\infty)$  συνεπώς  $f(x) \geq -1$  για κάθε  $x \in A_f$

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ.1.**  $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \ln x - 1 = 0$

$$t(x) = x \ln x - 1, x \in [1, e]$$

- $t$  συνεχής στο  $[1, e]$
- $\left. \begin{array}{l} t(1) = -1 < 0 \\ t(e) = e \ln e - 1 = e - 1 \end{array} \right\} t(1) \cdot t(e) < 0$

Από το Θ. Bolzano υπάρχει  $x_0 \in (1, e)$  τέτοιο ώστε  $t(x_0) = 0$

$$t'(x) = (x)' \ln x + x (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 > 0 \text{ για κάθε } x \in (1, e)$$

Άρα  $t \nearrow$  στο  $(1, e)$ , οπότε η ρίζα  $x_0$  είναι μοναδική

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = (\ln x_0) \cdot (x+1) - \ln x - 1$$

$$\Delta 2. \quad f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} \stackrel{\ln x_0 = \frac{1}{x_0}}{=} \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x_0 \cdot x}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x_0 \cdot x} \geq 0 \stackrel{x_0 \cdot x > 0}{\Leftrightarrow} x \geq x_0$$

x	0	$x_0$	$+\infty$
f'		-	+
f		$\searrow$	$\nearrow$
		ΟΛ.ΕΛ.	

Η  $f(x)$  παρουσιάζει στο  $x_0$  ελάχιστο το

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (\ln x_0) \cdot (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = \\ &= x_0 \cdot \ln x_0 + \ln x_0 - \ln x_0 - 1 = \\ &= x_0 \cdot \ln x_0 - 1 = x_0 \cdot \frac{1}{x_0} - 1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta 3.$

- Για  $x > 0$

$$\begin{aligned} g(x) = h(x) &\Leftrightarrow x \cdot e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(x \cdot e^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1) \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x - x \ln e = (x+1) \ln x_0 - (x+1) \ln e \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1) \ln x_0 - (x+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln x \cancel{-x} = (x+1) \ln x_0 \cancel{-x} - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+1) \ln x_0 - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το ερώτημα  $\Delta_2$  η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  ελάχιστο

Άρα  $f(x) \geq f(x_0) = 0$  και το " $=$ " ισχύει μόνο για  $x = x_0$ .



Άρα η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα το  $x = x_0$

Άρα  $g(x_0) = h(x_0)$

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln \frac{x_0}{e} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} (\ln x_0 - \ln e) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} (\ln x_0 - 1)$$

Θα δείξουμε ότι  $g'(x_0) = h'(x_0)$

$$g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0} (1 - x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0} (1 - x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0} (1 - x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \left(\frac{1 - x_0}{x_0}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \left(\frac{1}{x_0}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0} \cdot \left(\frac{x_0}{e}\right) \cdot \left(\frac{1}{x_0}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0} = \frac{x_0^{x_0}}{e^{x_0}} \cdot \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_0^{x_0} = e \Leftrightarrow \ln x_0^{x_0} = \ln e \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$$

Ισχύει από το  $\Delta_1$

- Για  $x \leq 0$  η εξίσωση  $g(x) = h(x)$  είναι αδύνατη, αφού

$$g(x) = x \cdot e^{-x} \leq 0 \text{ και } h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} > 0 \text{ αφού } x_0 \in (1, e)$$

**\Delta.4.**  $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) > \varphi(x)$$

$$A(x, f(x)) \quad B(x, \varphi(x)) \quad x > 0$$

$$(AB) = d(A, B) = \sqrt{(x-x)^2 + (\varphi(x) - f(x))^2} = \sqrt{(\varphi(x) - f(x))^2} =$$

$$= |\varphi(x) - f(x)| = f(x) - \varphi(x), \text{ αφού } f(x) > \varphi(x)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$S(x) = f(x) - \varphi(x), \quad x \in (0, +\infty)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1) Αν η  $\varphi(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  τότε:

Η  $S(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ ,

$S(x) \geq S(x_0)$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$

αφού παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0$  που είναι εσωτερικό σημείο του  $(0, +\infty)$ .

Από το Θ.Fermat:  $S'(x_0) = 0$

$S'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$

$S'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0) \stackrel{f'(x_0)=0}{\Leftrightarrow \Delta_2} \varphi'(x_0) = 0$

Άρα το  $x_0$  είναι κρίσιμο σημείο της  $\varphi(x)$ .

2) Αν η  $\varphi(x)$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε το  $x_0$  είναι κρίσιμο σημείο της  $\varphi(x)$ .

Σε κάθε περίπτωση, το  $x_0$  είναι κρίσιμο σημείο της  $\varphi$



φροντιστήρια  
ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ