

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

**ΘΕΜΑ Α**

A1. Σελίδα 111 σχολικού βιβλίου

A2. Σελίδα 104 σχολικού βιβλίου

A3. Σελίδα 74 σχολικού βιβλίου

A4. α) Ψευδές

β) Αντιπαράδειγμα η συνάρτηση  $f(x) = x^{2\nu+1}$ , σελίδα 61 σχολικού βιβλίου

A5. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

**ΘΕΜΑ Β**

B1. Για κάθε  $x_1, x_2 \in A_f$  με

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-3} = \frac{3x_2+1}{x_2-3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3x_1+1)(x_2-3) = (3x_2+1)(x_1-3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x_1x_2 - 9x_1 + x_2 - 3 = 3x_1x_2 - 9x_2 + x_1 - 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -9x_1 + x_2 = -9x_2 + x_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -10x_1 = -10x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Άρα  $f$  "1-1" οπότε ορίζεται η  $f^{-1}$

B2.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-3} = y \Leftrightarrow 3x+1 = yx-3y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x-yx = -1-3y \Leftrightarrow (3-y) \cdot x = -1-3y \quad (1) \end{aligned}$$

• Αν  $y=3$  τότε η (1) γράφεται  $0 = -1$  Άτοπο

• Αν  $y \neq 3$  τότε η (1) γράφεται  $x = \frac{-1-3y}{3-y} \Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{y-3}$  και  $x \in A_f$  άρα  $x \neq 3$

Επομένως  $\frac{3y+1}{y-3} \neq 3$

Αν  $\frac{3y+1}{y-3} = 3 \Leftrightarrow 3y+1 = 3y-9 \Leftrightarrow 0y = -10$  αδύνατη

Άρα  $\frac{3y+1}{y-3} \neq 3$  για κάθε  $y \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-3}, y \neq 3 \text{ ή } f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}, x \neq 3$$

Αφού  $A_f = A_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\}$  και  $f(x) = f^{-1}(x) \quad \forall x \neq 3$

Επομένως  $f = f^{-1}$

**B3.**

α' τρόπος

$$(f \circ f)(x) = f(f^{-1}(x)) = x \text{ για κάθε } x \in A_{f^{-1}} = A_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

β' τρόπος

$$\begin{aligned} D_{f \circ f} &= \{x \in D_f / f(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \neq 3 / f(x) \neq 3\} = \\ &= \left\{x \neq 3 / \frac{3x+1}{x-3} \neq 3\right\} = \\ &= \{x \neq 3 / 3x+1 \neq 3x-9\} = \mathbb{R} - \{3\} \end{aligned}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{3x+1}{x-3}\right) = \frac{3 \cdot \frac{3x+1}{x-3} + 1}{\frac{3x+1}{x-3} - 3} = \frac{\frac{9x+3+x-3}{x-3}}{\frac{3x+1-3x+9}{x-3}} = \frac{10x}{10} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\text{B4. } L = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left( f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left( \frac{3x+1}{x-3} \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right)$$

$$\left| \frac{3x+1}{x-3} \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| = \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| \cdot 1 = \left| \frac{3x+1}{x-3} \right|$$

$$\text{Άρα } -\left| \frac{3x+1}{x-3} \right| \leq \frac{3x+1}{x-3} \leq \left| \frac{3x+1}{x-3} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left( -\left| \frac{3x+1}{x-3} \right| \right) = 0$$

Από το κριτήριο παρεμβολής  $L=0$

### ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Γ1. } (AB\Gamma) = E(\theta) = \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot AM$$

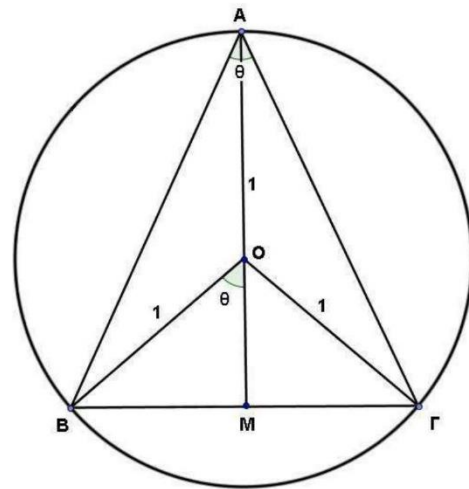
Έστω  $OM = x$  και  $BM = y$

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{1} \Leftrightarrow y = \eta\mu\theta \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{1} \Leftrightarrow x = \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$B\Gamma = 2y = 2\eta\mu\theta$$

$$AM = AO + OM = 1 + x = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\text{Άρα } E(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 2\eta\mu\theta \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) = \eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta), \quad \theta \in (0, \pi)$$



Γ2.

$$\begin{aligned} E'(\theta) &= -\eta\mu\theta \cdot \eta\mu\theta + (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \\ &= -\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = \\ &= -(1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta) + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = \\ &= -1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 \end{aligned}$$

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\theta = -1 \\ \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\sigma\upsilon\nu\theta = -1$  αδύνατη γιατί  $\theta \in (0, \pi)$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$\theta$	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\pi$	$+\infty$	
$E'(\theta)$	↘		+	↘	↘	
$E(\theta)$	↘		↗	↘	↘	

$E'(\theta) \neq 0$  για κάθε  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$  και αφού η  $E'(\theta)$  συνεχής, διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα  $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$  και  $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ .

$$E'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$$

Άρα  $E'(\theta) > 0$  για κάθε  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$  αφού  $\frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

$$E'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} - 1 = -1 < 0$$

Άρα  $E'(\theta) < 0$  για κάθε  $\theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$  αφού  $\frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$

Η  $E(\theta)$  μεγιστοποιείται όταν  $\theta = \frac{\pi}{3}$  (Το τρίγωνο είναι ισόπλευρο)

Γ3.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} E(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} [(1 + \sigma \nu \theta) \cdot \eta \mu \theta] = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} E(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} [(1 + \sigma \nu \theta) \cdot \eta \mu \theta] = 0$$

$$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 + \sigma \nu \frac{\pi}{3}\right) \cdot \eta \mu \frac{\pi}{3} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ τ.μ.}$$

Στο διάστημα  $\Delta_1 = \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$  η  $E(\theta)$  είναι συνεχής και ↗

$$\text{Άρα } E\left(\left(0, \frac{\pi}{3}\right]\right) = \left(\lim_{\theta \rightarrow 0^+} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

$$\frac{3}{4} \in E\left(\left(0, \frac{\pi}{3}\right]\right) \text{ Άρα υπάρχει } \theta_1 \in E\left(0, \frac{\pi}{3}\right]: E(\theta_1) = \frac{3}{4}$$

Επειδή  $E(\theta)$  ↗, το  $\theta_1$  είναι μοναδικό.

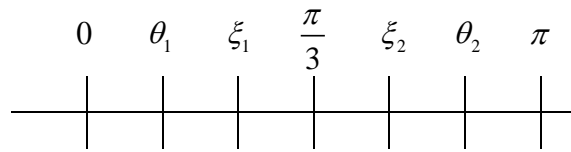
Στο διάστημα  $\Delta_2 = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$  η  $E(\theta)$  είναι συνεχής και ↘

$$\text{Άρα } E\left(\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)\right) = \left(\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

$$\frac{3}{4} \in E\left(\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)\right) \text{ Άρα υπάρχει } \theta_2 \in E\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right): E(\theta_2) = \frac{3}{4}$$

Επειδή  $E(\theta)$  ↘, το  $\theta_2$  είναι μοναδικό.

Γ4.



Η  $E(\theta)$  είναι:

- συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα  $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$  και  $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$
- παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα  $\left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$  και  $\left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει  $\xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right) \subseteq (0, \pi)$ :

$$\begin{aligned} E'(\xi_1) &= \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{4} \end{aligned}$$

Ομοίως από Θ.Μ.Τ. για την  $E(\theta)$  στο  $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$  υπάρχει  $\xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right) \subseteq (0, \pi)$ :

$$E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) \cdot E'(\xi_2) = E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) \cdot E'(\xi_2) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) \cdot E'(\xi_2) = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Άρα  $\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) \cdot E'(\xi_2)$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**  $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda x} \cdot \lambda = \ln x + 1 - \frac{1}{x}, x > 0$

Παρατηρούμε ότι  $f'(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Άρα  $f' \nearrow$  στο  $(0, +\infty)$ , άρα το  $x=1$  είναι η μοναδική ρίζα της  $f'$ .

• για  $0 < x < 1 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

• για  $x > 1 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$			-	+
$f(x)$			$\searrow$	$\nearrow$

Η  $f(x)$  παρουσιάζει στο  $x=1$  ελάχιστο το  $f(1) = 1 \cdot \ln 1 - \ln \lambda = -\ln \lambda$

Το σημείο του ακροτάτου είναι το  $A(1, -\ln \lambda)$

Το  $A$  ανήκει στην ευθεία  $x=1$  γιατί  $\lambda \in (0, +\infty) \Leftrightarrow \ln \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\ln \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Delta 2. x^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x \ln x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x \ln x - \ln(\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \min f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq 1$$

Άρα  $\lambda_{\max} = 1$

**Δ3.** Έστω  $M(x_0, g(x_0))$  τυχαίο σημείο της  $C_g$

Η εφαπτομένη της  $C_g$  στο  $M$  είναι η:

$$\varepsilon: y - g(x_0) = g'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$g(x) = x^x = e^{x \cdot \ln x}$$

$$g'(x) = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \cdot \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$$

$$\varepsilon: y - x_0^{x_0} = x_0^{x_0} \cdot (\ln x_0 + 1) \cdot (x - x_0)$$

Για  $x=0$  και  $y=0$  έχουμε:

$$-x_0^{x_0} = x_0^{x_0} (\ln x_0 + 1)(-x_0)$$

$$-1 = (\ln x_0 + 1)(-x_0) \Leftrightarrow x_0 \cdot \ln x_0 + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0 + 1 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ Από το } (\Delta 1).$$

$$\text{Άρα } \varepsilon: y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow \varepsilon: y = x$$

**Δ4.**

$$i) h(x) = \begin{cases} e^{x \ln x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

- για  $x > 0$ ,  $h(x) = e^{x \ln x}$  συνεχής ως σύνθεση συνεχών
- στο  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1 = h(0) \text{ γιατί:}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Άρα  $h$  συνεχής στο  $x_0 = 0$

Άρα  $h$  συνεχής στο  $[0, +\infty)$

ii) ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x) = x^{2020} \left( 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt, \quad x \in [0, 1]$$

Η  $\varphi(x)$  είναι:

- συνεχής στο  $[0, 1]$  ως πολυωνυμική

- $\varphi(0) = \int_0^1 h(1-t) dt$

Θέτουμε  $u = 1-t$ ,  $du = -dt$

Για  $t=0$ ,  $u=1$  και για  $t=1$ ,  $u=0$ .

Άρα,  $\varphi(0) = -\int_1^0 h(u) du = \int_0^1 h(u) du = \int_0^1 h(t) dt > 0$  γιατί:

Η  $h(t)$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$ ,

$h(t) \geq 0$  στο  $[0, 1]$  και η  $h(t)$  δεν είναι παντού 0 στο  $[0, 1]$ .

$\varphi(1) = 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt < 0$  γιατί:

$g'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$

$$\begin{aligned} g''(x) &= (x^x)' \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot (\ln x + 1)' = \\ &= (e^{x \ln x})' \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x} = \\ &= x^x \cdot (\ln x + 1) \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x} = \\ &= x^x \left[ (\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right] > 0 \end{aligned}$$

Άρα η  $g$  στρέφει τα κοίλα άνω στο  $(0, +\infty)$

Άρα η  $C_g$  βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Άρα από το Δ3, έχουμε ότι  $g(x) \geq x$  και το " $=$ " ισχύει μόνο για  $x=1$ .

Άρα

$$\begin{aligned} \int_1^2 g(x) dx > \int_1^2 x dx &\Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx > \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx > \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx > 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \int_1^2 g(x) dx > 3 \Leftrightarrow 3 - 2 \int_1^2 g(x) dx < 0 \Leftrightarrow \varphi(1) < 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς  $\varphi(0) \cdot \varphi(1) < 0$

Από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση  $\varphi(x) = 0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(0,1)$