**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό Βιβλίο Σελ.76

**Α2.** Σχολικό Βιβλίο Σελ.104

**Α3.** **α) Ψευδής**

**β)** Σχολικό Βιβλίο Σελ.136.

**Α4.** **α)** Λ

**β) Σ**

**γ) Σ**

**δ) Σ**

**ε) Σ**

## ΘΕΜΑ Β

$B1.\ f{:}(1,+\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ ,x$> 1$

$g(x) = e^x$ ,$D_g$= $\mathbb{R}$

$$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} | x \in D_g \ και \ g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \ και \ e^x > 1\} =$$

$$= (0,+\infty)$$

($f$og)(x)=$f$(g(x))=$\frac{g(x)+2}{g(x)-1} \Rightarrow$($f$og)(x)= $\frac{e^x+2}{e^x-1}$

**Β2.** ($f$og)(x)=$\frac{e^x+2}{e^x-1}$, x$> 0$

Η $f$og είναι παραγωγίσιμη στο (0,$+\infty$) με

$$(fog)'(x) = \left(\frac{e^x+2}{e^x-1}\right)' = \frac{e^x \cdot (e^x-1) - (e^x+2) \cdot e^x}{(e^x-1)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (fog)'(x) = \frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-2e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x-1)^2} < 0$, για κάθε $x > 0$.

Η $f$og(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (0,$+\infty$), άρα 1-1, συνεπώς υπάρχει η αντίστροφη

$(fog)^{-1}(x)$

$$D_{(fog)^{-1}} = (fog)(D_{fog}) = (fog)((0,+\infty)) \xLeftrightarrow{fog\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}$$

$$\Leftrightarrow \left(\lim_{x\to+\infty}(fog)(x), \lim_{x\to 0^+}(fog)(x)\right) = (1,+\infty)$$

Καθώς $\lim_{x\to+\infty}(fog)(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{e^x-1} = \lim_{X\to+\infty}\frac{(e^x+2)'}{(e^x-1)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$

Και για $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x - 1 > 0$ με

$$\lim_{\chi\to 0^+} fog(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+2}{e^x-1} = \ = \lim_{x\to 0^+}(e^x+2)\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x-1} = +\infty$$

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης $(fog)^{-1})(x)$ είναι $D_{(fog)^{-1}} = (1,+\infty)$

Για χ>0 και y>1 θέτουμε:

$$y = (f\circ g)(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x+2}{e^x-1} \Leftrightarrow y(e^x-1) = e^x+2 \Leftrightarrow ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ye^x - e^x = y+2 \Leftrightarrow (y-1)e^x = y+2 \overset{y>1\alpha\rho\alpha:y\neq1}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$$

Άρα: $(f\circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ x>1.

**B3.** $\varphi(x) = (f\circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$\varphi'(x) = \left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)' = \frac{x-1}{x+2}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{-3x+3}{(x+2)(x-1)^2} < 0$$

για κάθε $x > 1$άρα ή φ(x) γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$

**B4.**Για $x > 1$ έχουμε $\lim_{x\to1^+}\varphi(x) = \lim_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \overset{u=\frac{x+2}{x-1}}{=} \lim_{u\to+\infty}\ln u = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \overset{u=\frac{x+2}{x-1}}{=} \lim_{u\to1}\ln u = \ln 1 = 0$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}-\ln\lambda, x\le 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu\chi, 0<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

Η $f$ είναι συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right)$ άρα συνεχής στο $x_0=0$.

Για $x<0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=1-\ln\lambda$ (1)

Για $x>0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=0+\lambda\cdot 1=\lambda$ (2)

$f(0)=1-\ln\lambda$. Θα πρέπει : $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow}1-\ln\lambda=\lambda\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln\lambda+\lambda-1=0,\lambda>0.$

Θέτουμε: $g(\lambda)=\ln\lambda+\lambda-1,\quad \lambda>0$

Η g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα και συνεχής με $g(1)=\ln 1+1-1=0$ προφανής ρίζα

Είναι $g'(\lambda)=\frac{1}{\lambda}+1>0$ για λ>0

Η g γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα και «1-1» άρα λ=1 μοναδική

**Γ2.** Για λ=1

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}, & x\le 0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Για χ<0

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(1-x)}=1$$

Για χ>0

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1+0=1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ συνεπώς: $f'(0)=1$

$\lambda=\varepsilon\varphi\omega=f'(0)=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\omega=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\qquad \kappa\in\mathbb{Z}$

Άρα: $\omega=\frac{\pi}{4}$

**Γ3.** Για $x<0$ η $f$ παραγωγίσιμη με $f'(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=-\frac{(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$

Για $x=0$ $f'(0)=1$

Για $0<x<\frac{3\pi}{2}$ η $f$ παραγωγίσιμη με $f'(x)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$

Άρα, $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}, x<0\\ 1, \ x=0\\ \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x, 0<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

Για κάθε εσωτερικό σημείο του $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right)$ ορίζεται η $f'(x)$, άρα αναζητούμε κρίσιμα σημεία όπου $f'(x)=0$.

Για $x<0$ είναι $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$ ,άρα δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία για $x<0$.

Για $x=0$ είναι $f'(0)=1\neq 0$.

Για $0<x<\frac{3\pi}{2}$ θέτουμε

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu x\Leftrightarrow$$

$$x=\begin{cases}2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-x\\ 2\kappa\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\\ x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}+x \quad (\alpha\delta\upsilon\nu\alpha\tau\eta)\end{cases} ,\kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}, \kappa\in Z, x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$$

Είναι $0<x<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 0<\kappa\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<\kappa<\frac{5}{4},\kappa\in\mathbb{Z}$

Άρα $\kappa=0,\kappa=1$. Για $\kappa=0$ είναι $x_0=\frac{\pi}{4}$ και για $\kappa=1$, είναι $x_1=\frac{5\pi}{4}$.

Επομένως τα κρίσιμα σημεία $A\left(\frac{\pi}{4},f(\frac{\pi}{4})\right)$, $A\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$ και $B\left(\frac{5\pi}{4},f(\frac{5\pi}{4})\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$

**Γ4.** Για $\alpha\leq 0$ η εξίσωση εφαπτομένης είναι $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$, Θέτουμε $y=0$ για το σημείο τομής με τον άξονα χ΄χ. $-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow \frac{-1}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow -1+\alpha=x-\alpha\Leftrightarrow x=2\alpha-1$

$B(2\alpha-1,0)$

$x_B(t)=2\alpha(t)-1$

$$x_B'(t) = 2\alpha'(t) = 2\left(-\frac{\alpha(t)}{3}\right) = -\frac{2\alpha(t)}{3}$$

Για $t = t_0$

$$x_B'(t_0) = -\frac{2\alpha(t_0)}{3} = -\frac{2(-1)}{3} = \frac{2}{3}$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** $f(x) = e^x + x^2 - e\cdot x - 1$

$$f'(x) = e^x + 2x - e$$

$$f''(x) = e^x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $f''(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ άρα η $f'$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- Η $f'$ συνεχής στο $[0,1]$
- $\left.\begin{array}{l} f'(0) = e^0 + 2\cdot 0 - e = 1 - e < 0 \\ f'(1) = e^1 + 2\cdot 1 - e = 2 > 0 \end{array}\right\} f'(0)\cdot f'(1) < 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$: $f'(x_0) = 0$

Για κάθε $x > x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Για κάθε $x < x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Για κάθε $x > x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0)$

Για κάθε $x < x_0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0)$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq f(x_0)$

Συνεπώς η $f$ παρουσιάζει στο $x_0$ ολικό ελάχιστο το $f(x_0) = e^{x_0} + {x_0}^2 - e\cdot x_0 - 1$

Όμως $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \qquad (1)$

Άρα $f(x_0) = e^{x_0} + {x_0}^2 - e\cdot x_0 - 1 \overset{(1)}{=} e - 2x_0 + {x_0}^2 - ex_0 - 1 = {x_0}^2 - (e+2)\cdot x_0 + e - 1$

**Δ2.** $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left\{\dfrac{1}{x-x_0}\left[\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\}=$

Για $x>x_0$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{x-x_0}=+\infty$

Από Δ1 για $x>x_0$ η $f'(x_0)>0$ . Άρα $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=+\infty$

Ξέρουμε ότι: $-1\le\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\le 1\Leftrightarrow -(x-x_0)\le(x-x_0)\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\le(x-x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[-(x-x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0^+}(x-x_0)=0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[(x-x_0)\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]=0$

Συνεπώς:

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\left\{\dfrac{1}{x-x_0}\left[\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\}=(+\infty)\left[(+\infty)+0\right]=+\infty$

Για $x<x_0$

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{x-x_0}=-\infty$

Από Δ1 για $x<x_0$ η $f'(x_0)<0$ . Άρα $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=-\infty$

Ξέρουμε ότι: $-1\le\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\le 1\Leftrightarrow -(x-x_0)\ge(x-x_0)\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\ge(x-x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[-(x-x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0^-}(x-x_0)=0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[(x-x_0)\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]=0$

Συνεπώς:

$$\lim_{x\to x_0^-}\left\{\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\}=(-\infty)\left[(-\infty)+0\right]=+\infty$$

Συνεπώς: $\lim\limits_{x\to x_0}\left\{\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]\right\}=+\infty$

**<u>Β τρόπος</u>**

Η $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$

$$-1\leq\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\leq 1\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1\leq\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\leq\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+1$$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+1=+\infty$ από Κ.Π:

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right\}=+\infty$$

**Δ3.** Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-x_0$ η g είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Ισχύει $g(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$, διότι $x_0<1$ και

$g(x_0)=f(x_0)<0$ καθώς f γνησίως αύξουσα στο $(x_0,+\infty)$

για $x_0<1\Rightarrow f(x_0)<f(1)\Rightarrow f(x_0)<0$

Οπότε $g(1)\cdot g(x_0)<0$ ,από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\rho\in(x_0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\rho)=0$.

Είναι $g'(x)=\left(f(x)+x-x_0\right)'=f'(x)+1>0$ για κάθε $x\in(x_0,1)$ [λόγω Δ1]

άρα η g γνησίως αύξουσα στο $(x_0,1)$ άρα 1-1 άρα η ρίζα μοναδική.

**Δ4.** Αν ρ η ρίζα του ερωτήματος Δ3 τότε ισχύει ότι: $f(\rho)=x_0-\rho$

Θα δείξουμε ότι:

$$f(x_0)>f(\rho)\left(f'(\kappa)+1\right)\Leftrightarrow f(x_0)>(x_0-\rho)\left(f'(\kappa)+1\right)\overset{\rho>x_0\Leftrightarrow x_0-\rho<0}{\Leftrightarrow}\frac{f(x_0)}{(x_0-\rho)}<\left(f'(\kappa)+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x_0)}{(x_0-\rho)}-1<f'(\kappa)\Leftrightarrow\frac{f(x_0)-(x_0-\rho)}{(x_0-\rho)}<f'(\kappa)\Leftrightarrow\frac{f(x_0)-f(\rho)}{(x_0-\rho)}<f'(\kappa)$$

Η f συνεχής στο $[x_0,\rho]$

Η f παραγωγίσιμη στο $[x_0,\rho]$

Από θεώρημα Μέσης Τιμής ξέρουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_0, \rho)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}$$

Όμως $\xi \in (x_0, \rho)$ οπότε για κάθε $\kappa \in (\rho, 1)$ ισχύει ότι:

$$\xi < \kappa \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa)$$