ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2022

ΜΑΘΗΜΑ

Μαθηματικά Προσανατολισμού

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

12:00

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:	*06 / 06 / 2022*
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:	***Μαθηματικά Προσανατολισμού***

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ 186

Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$ είναι μια παράγουσα της *f* στο *Δ*, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$

Έστω *G* είναι μια άλλη παράγουσα της *f* στο *Δ*. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε

$$G'(x)=F'(x), \text{ για κάθε } x\in\Delta$$

Επομένως από τις Συνέπειες του Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε

$$G(x)=F(x)+c, \text{ για κάθε } x\in\Delta$$

Α2. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ 142

Έστω μια συνάρτηση *f* ορισμένη σ' ένα διάστημα *Δ* και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του *Δ*. Αν η *f* παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

Α3. Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ 161

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι τότε $+\infty$ ή $-\infty$ η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Α4.

Α) Σ (σελ. 67) **β) Σ** (σελ.128) **γ) Σ** (σελ. 114) **δ) Λ** (σελ. 53) **ε) Λ** (σελ. 214)

ΘΕΜΑ Β

B1 Ισχύει ότι $D_h = D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in [0,+\infty) : \sqrt{x} \in (-\infty,1]\} = [0,1]$

Ακόμα $h(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

B2 Έχουμε $h(x) = (x-1)^2, x \in [0,1]$

$h'(x) = 2(x-1) < 0, x \in [0,1)$ και η h συνεχής στο: $[0,1]$

$h \searrow$ στο $[0,1]$ άρα η h είναι 1-1

Ακόμα η h συνεχής στο $[0,1]$ και $h \searrow$ άρα το σύνολο τιμών της h προκύπτει:

$$\left.\begin{aligned} h(0)&=1 \\ h(1)&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h(D_h) = [0,1] = D_{h^{-1}}$$

Έχουμε λοιπόν: $h(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} |x-1| = \sqrt{y} \overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow} -x+1 = \sqrt{y}$

$$\Leftrightarrow x = 1-\sqrt{y} \overset{h^{-1}(y)=x}{\Leftrightarrow} h^{-1}(y) = 1-\sqrt{y} \overset{y\to x}{\Leftrightarrow} h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}$$

Επομένως $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}$ και $D_{h^{-1}} = [0,1]$.

B3 $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

i. Αρκεί να δείξουμε ότι η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $\varphi(0) \neq \varphi(1)$

Η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η φ είναι συνεχής στο 1, έχουμε λοιπόν:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$$

Επομένως η φ είναι συνεχής στο 1.

Ακόμα $\left.\begin{aligned} \varphi(0)&=1 \\ \varphi(1)&=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(0) \neq \varphi(1)$

Τελικά ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο $[0,1]$ άρα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta$ με $\eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$.

ii. Έχουμε $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \underset{\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\overset{\eta\mu\alpha \nearrow}{\Rightarrow}} \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$

Άρα από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. $f'(x) = \begin{cases} -2 & , x < -1 \\ 3x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}$

Από συνέπειες θεωρήματος μέσης τιμής έχουμε:

$f(x) = \begin{cases} -2x + c_1 & , x < -1 \\ x^3 - x + c_2 & , x > -1 \end{cases}$ και επειδή η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + c_1 & , x < -1 \\ c_3 & , x = -1 \\ x^3 - x + c_2 & , x > -1 \end{cases}$$

Η f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, συνεπώς $f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$

Η f είναι συνεχής στο -1, συνεπώς $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow -2(-1) + c_1 = (-1)^3 - (-1) \Leftrightarrow c_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0 = c_3$$

Συνεπώς $f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \le -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$

Γ.2. Για $x > -1$, $f(x) = x^3 - x$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$f'(x) = 3x^2 - 1$ συνεπώς $f'(x_0) = 3x_0^2 - 1$

Άρα $(\varepsilon): y - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(x - x_0)$

Το $\mathrm{B}(0, -2) \in (\varepsilon)$ άρα οι συντεταγμένες του, επαληθεύουν την εξίσωση (ε)

$$-2-x_0^{\ 3}+x_0=\left(3x_0^{\ 2}-1\right)\left(0-x_0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2-x_0^{\ 3}+x_0=-3x_0^{\ 3}+x_0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x_0^{\ 3}=2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_0^{\ 3}=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_0=\sqrt[3]{1}\Leftrightarrow x_0=1$$

Συνεπώς $(\varepsilon): y-1^3+1=\left(3\cdot 1^2-1\right)(x-1)\Leftrightarrow(\varepsilon): y=2x-2$

Γ.3. Έστω $\mathrm{M}\left(x(t),y(t)\right)$ και η προβολή του στον άξονα $x'x$ είναι $\mathrm{K}\left(x(t),0\right)$

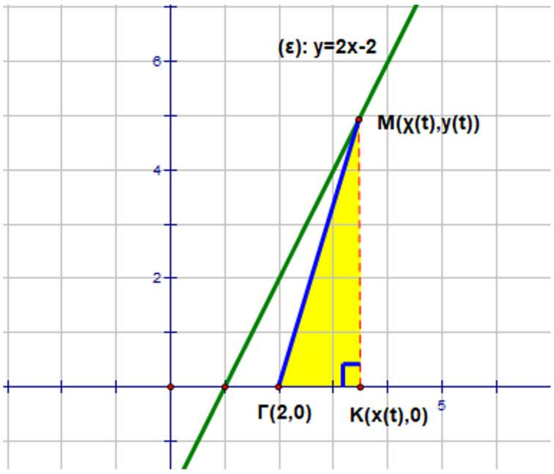
Το εμβαδόν του τριγώνου $\overset{\triangle}{\mathrm{MK\Gamma}}$ είναι:

$$\mathrm{E}_{\overset{\triangle}{\mathrm{MK\Gamma}}}=\frac{1}{2}\left|x(t)-2\right|\left|2x(t)-2\right|\overset{x(t)>2>1}{=}\frac{1}{2}\left(x(t)-2\right)\left(2x(t)-2\right)=\left(x(t)-2\right)\left(x(t)-1\right)=x^2(t)-3x(t)+2$$

Άρα $\mathrm{E}(t)=x^2(t)-3x(t)+2$ και $\mathrm{E}'(t)=2x(t)\cdot x'(t)-3x'(t)$

Την χρονική στιγμή $t=t_0$ έχουμε $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$

Άρα $\mathrm{E}'(t_0)=2x(t_0)\cdot x'(t_0)-3x'(t_0)=2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2=6$ $\tau.\mu./\mathrm{sec}$



Γ.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]$

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|=\frac{\left|\eta\mu f(x)\right|}{\left|f(x)\right|}\le\frac{1}{\left|f(x)\right|}\quad \text{άρα}\quad \left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|\le\frac{1}{\left|f(x)\right|}$$

Επομένως $-\dfrac{1}{\left|f(x)\right|}\le\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\le\dfrac{1}{\left|f(x)\right|}$

Για $x<-1$ ισχύει $f(x)=-2x-2$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x-2)=+\infty\quad \text{άρα}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=0\quad \text{και}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left|f(x)\right|}=0$$

Ομοίως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{1}{|f(x)|}\right]=0$

Συνεπώς από κριτήριο παρεμβολής ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}\underset{\substack{x\to-\infty\\u\to+\infty}}{\overset{u=-x}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1-(-u)^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3}=1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]=0+1=1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. i) $f'(x)=1-\dfrac{1}{3x}\cdot 3=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$ $\quad$ 0		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	.ΕΛ. $(1,\ 1-\ln 3)$	$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει στο $x=1$ ελάχιστο το $f(1)=1-\ln 3<0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x-\ln(3x))=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}x=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(3x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln(3x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\dfrac{\ln(3x)}{x}\right)\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{[\ln(3x)]'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3x}\cdot3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

- Στο διάστημα $(0,1]$ η $f(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Άρα $f((0,1])=\left[f(1),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=[1-\ln 3,+\infty)$ και $0\in f((0,1])$

Άρα υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$

Επειδή f γνησίως φθίνουσα, το x_1 είναι μοναδικό.

- Στο διάστημα $[1,+\infty)$ η $f(x)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Άρα $f\left(\left[1,+\infty\right)\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[1-\ln 3,+\infty\right)$ και $0\in f\left(\left[\left(1,+\infty\right]\right)\right)$

Άρα υπάρχει $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$

Επειδή f γνησίως αύξουσα, το x_2 είναι μοναδικό.

Τελικά υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2 της εξίσωσης $f(x)=0$ με $x_1<1<x_2$

ii) $f''(x)=\dfrac{(x-1)'\cdot x-(x-1)\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{x-x+1}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

Δ2 $E=\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)\right|dx$

Για $x_1\le x\le 1$ ισχύει ότι $f\searrow$

Άρα $f(x_1)\ge f(x)\Leftrightarrow f(x)\le 0$

Για $1\le x\le x_2$ ισχύει ότι $f\nearrow$

Άρα $f(x)\le f(x_2)\Leftrightarrow f(x)\le 0$

Τελικά $f(x)\le 0$, για κάθε $x\in[x_1,x_2]$

Άρα $E=\int_{x_1}^{x_2}-f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\ln(3x)-x\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)dx-\int_{x_1}^{x_2}xdx=\int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln(3x)\,dx-\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}$

$$=\left[x\ln(3x)\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}(x)\left(\ln(3x)\right)'dx-\left(\frac{x_2^{\ 2}}{2}-\frac{x_1^{\ 2}}{2}\right)=x_2\ln(3x_2)-x_1\ln(3x_1)-\int_{x_2}^{x_1}x\frac{1}{3x}3dx-\left(\frac{x_2^{\ 2}}{2}-\frac{x_1^{\ 2}}{2}\right)$$

$$=x_2\ln(3x_2)-x_1\ln(3x_1)-\int_{x_1}^{x_2}1dx-\left(\frac{x_2^{\ 2}}{2}-\frac{x_1^{\ 2}}{2}\right)=x_2\ln(3x_2)-x_1\ln(3x_1)-\left[x\right]_{x_1}^{x_2}-\left(\frac{x_2^{\ 2}}{2}-\frac{x_1^{\ 2}}{2}\right).$$

Τα x_1,x_2 είναι ρίζες της f. Άρα

$f(x_1)=0\Leftrightarrow x_1-\ln(3x_1)=0\Leftrightarrow \ln(3x_1)=x_1$

$f(x_2)=0\Leftrightarrow x_2-\ln(3x_2)=0\Leftrightarrow \ln(3x_2)=x_2$

Άρα $E=x_2x_2-x_1x_1-(x_2-x_1)-\left(\dfrac{x_2^{\ 2}}{2}-\dfrac{x_1^{\ 2}}{2}\right)=x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2}-x_2+x_1-\dfrac{x_2^{\ 2}}{2}+\dfrac{x_1^{\ 2}}{2}$

$$=\frac{x_2^{\ 2}}{2}-\frac{x_1^{\ 2}}{2}-x_2+x_1=\frac{x_2^{\ 2}-x_1^{\ 2}-2x_2+2x_1}{2}=\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)-2(x_2-x_1)}{2}=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)$$

Δ3. Από το Δ2 έχουμε ότι

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0 \text{ αφού } x_2 - x_1 > 0$$

Άρα $x_1 + x_2 > 2 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$

$x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 2 - 1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$ και f γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, άρα

$f(2 - x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0$

Δ4. $2f(x) = (1 - \ln 3) + f'(x_2)(x - x_2)$

Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(x_2, f(x_2))$ έχει εξίσωση

$\varepsilon_1 : y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$

Η f είναι κυρτή, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής $\mathrm{M}(x_2, f(x_2))$

Άρα $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ (1) και το "$=$" ισχύει μόνο για $x = x_2$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$

Άρα $f(x) \geq 1 - \ln 3$ (2) και το "$=$" ισχύει μόνο για $x = 1$ όμως: $x_2 > 1$

Από (1) και (2) έχουμε με πρόσθεση κατά μέλη

$2f(x) > (1 - \ln 3) + f'(x_2)(x - x_2)$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.