ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023

ΜΑΘΗΜΑ

Μαθηματικά (Άλγεβρα) ΕΠΑ.Λ.

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

11:00

φροντιστήρια πουκαμισάς

Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Απόδειξη σελ. 30 σχολικού βιβλίου

Α.2. Ορισμός σελ. 22 σχολικού βιβλίου

Α.3. α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=2x^3+\alpha x^2-12x+10,\ x\in\mathbb{R}$

Β.1. Η παράγωγος της συνάρτησης είναι $f'(x)=6x^2+2\alpha x-12$

Β.2. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ δηλαδή $f'(1)=0$. Έχουμε λοιπόν:

$f'(1)=0\Leftrightarrow 6+2\alpha-12=0\Leftrightarrow 2\alpha-6=0\Leftrightarrow 2\alpha=6\Leftrightarrow \alpha=3$

Άρα $f(x)=2x^3+3x^2-12x+10,\ x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=6x^2+6x-12,\ x\in\mathbb{R}$

Β.3. $f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2+6x-12=0\Leftrightarrow 6\left(x^2+x-2\right)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm3}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+3}{2}=\dfrac{2}{2}=1\\[2mm]\dfrac{-1-3}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2\end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	Τ.ΜΕΓ.	$\searrow$	Τ.ΕΛ.	$\nearrow$	

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[1,+\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,1]$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=-2$ το $f(-2)=30$ και τοπικό ελάχιστο στο $x=1$ το $f(1)=3$.

Β.4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^2+6x-12}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}6(x+2)=18$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Αρχικά $x_3 = \frac{16+20}{2} = 18$ και $x_4 = \frac{20+24}{2} = 22$

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις $[\ ,\ )$	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \nu_i$
$[8,12)$	10	20	200
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$	18	ν_3	$18\nu_3$
$[20,24)$	22	5	110
	Σύνολο	$40+\nu_3$	$520+18\nu_3$

Εφόσον $\bar{x} = 14$, είναι:
Από την τελευταία γραμμή του πίνακα είναι:

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 14 = \frac{1}{40+\nu_3}(520+18\nu_3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 14(40+\nu_3) = 520+18\nu_3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 560+14\nu_3 = 520+18\nu_3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\nu_3 = 40 \Leftrightarrow$$
$$\nu_3 = 10$$

Γ.2. Αρχικά είναι $\nu = 20+15+10+5 = 50$.

Επομένως ο πίνακας είναι:

Κλάσεις $[\ ,\ )$	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \nu_i$
$[8,12)$	10	20	200
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$	18	10	180
$[20,24)$	22	5	110
	Σύνολο	50	700

Γ.3. Για τη διακύμανση s^2 είναι:

Κλάσεις $[\ ,\ )$	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i$
$[8,12)$	10	20	200	-4	16	320
$[12,16)$	14	15	210	0	0	0
$[16,20)$	18	10	180	4	16	160
$[20,24)$	22	5	110	8	64	320
	Σύνολο	50	700			800

Είναι $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i = \frac{1}{50}\cdot 800 = 16$.

Γ.4. Για την τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$ και για τον συντελεστή μεταβολής CV έχουμε:

$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}$, επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

$f(x) = -\frac{1}{x^2},\ D_f = \mathbb{R}^*$

Δ.1. $f'(x) = \frac{(-1)' \cdot x^2 - (-1)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{0 + 1\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3},\ D_{f'} = \mathbb{R}^*$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} < 0 \Leftrightarrow x^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
f	↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Δ.2. $-4 \le x \le -1 \overset{f\,2}{\Leftrightarrow} f(-4) \ge f(x) \ge f(-1) \Leftrightarrow -\frac{1}{(-4)^2} \ge f(x) \ge -\frac{1}{(-1)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{16} \ge f(x) \ge -1 \Leftrightarrow -1 \le f(x) \le -\frac{1}{16}$

<u>β' τρόπος</u>

$-4 \le x \le -1 < 0 \Rightarrow (-4)^2 \ge x^2 \ge (-1)^2 \Leftrightarrow 0 < 1 \le x^2 \le 16 \Leftrightarrow \frac{1}{1} \ge \frac{1}{x^2} \ge \frac{1}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 \le -\frac{1}{x^2} \le -\frac{1}{16} \Leftrightarrow -1 \le f(x) \le -\frac{1}{16}$

Δ.3. Ψάχνουμε εξίσωση της μορφής $y=\lambda x+\beta$ όπου $\lambda=f'(1)$, άρα $\lambda=\frac{2}{1^3}=2$

Επομένως έχουμε $y=2x+\beta$ και $f(1)=1$

Το σημείο $(1,-1)$ επαληθεύει την εξίσωση άρα $-1=2\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=-3$

Επομένως η εξίσωση εφαπτομένης είναι η $y=2x-3$

Δ.4. $\bar{x}=4$ και $s_x=2$

Έχουμε $y_i=2x_i-3$ με $i=1,2,3$

Οπότε από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, σελ. 99

$\bar{y}=2\bar{x}-3 \Rightarrow \bar{y}=2\cdot 4-3 \Rightarrow \bar{y}=5$

$s_y=|2|\cdot s_x=2\cdot 2=4$

Επομένως έχουμε $CV_y=\frac{s_y}{|\bar{y}|}=\frac{4}{5}=0,8$