

---

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ  
**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023**

---

ΜΑΘΗΜΑ

Μαθηματικά (Άλγεβρα) ΕΠΑ.Λ.

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ



φροντιστήρια  
**ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ**

Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

φροντιστήρια  
ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

**ΘΕΜΑ Α**

- A.1. Απόδειξη σελ. 30 σχολικού βιβλίου  
 A.2. Ορισμός σελ. 22 σχολικού βιβλίου  
 A.3. α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Σ

**ΘΕΜΑ Β**

$$f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 12x + 10, x \in \mathbb{R}$$

- B.1. Η παράγωγος της συνάρτησης είναι  $f'(x) = 6x^2 + 2\alpha x - 12$   
 B.2. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $x_0 = 1$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$  δηλαδή  $f'(1) = 0$ . Έχουμε λοιπόν:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 + 2\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Άρα  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10, x \in \mathbb{R}$  και  $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12, x \in \mathbb{R}$

B.3.  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○
$f(x)$	↗	T.ΜΕΓ.		↘
			T.ΕΛ.	

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $(-\infty, -2]$  και  $[1, +\infty)$  ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-2, 1]$ . Η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x = -2$  το  $f(-2) = 30$  και τοπικό ελάχιστο στο  $x = 1$  το  $f(1) = 3$ .

B.4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 6x - 12}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 6(x+2) = 18$

**ΘΕΜΑ Γ**

Γ.1. Αρχικά  $x_3 = \frac{16+20}{2} = 18$  και  $x_4 = \frac{20+24}{2} = 22$

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις [ , )	Κεντρική τιμή $x_i$	Συχνότητα $v_i$	$x_i v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)	18	$v_3$	$18v_3$
[20,24)	22	5	110
Σύνολο		$40 + v_3$	$520 + 18v_3$

Εφόσον  $\bar{x} = 14$ , είναι:

Από την τελευταία γραμμή του πίνακα είναι:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i v_i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 14 &= \frac{1}{40 + v_3} (520 + 18v_3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 14(40 + v_3) &= 520 + 18v_3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 560 + 14v_3 &= 520 + 18v_3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4v_3 &= 40 \Leftrightarrow \\ v_3 &= 10 \end{aligned}$$

Γ.2. Αρχικά είναι  $v = 20 + 15 + 10 + 5 = 50$ .

Επομένως ο πίνακας είναι:

Κλάσεις [ , )	Κεντρική τιμή $x_i$	Συχνότητα $v_i$	$x_i v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)	18	10	180
[20,24)	22	5	110
Σύνολο		50	700

Γ.3. Για τη διακύμανση  $s^2$  είναι:

Κλάσεις [ , )	Κεντρική τιμή $x_i$	Συχνότητα $v_i$	$x_i v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
[8,12)	10	20	200	-4	16	320
[12,16)	14	15	210	0	0	0
[16,20)	18	10	180	4	16	160
[20,24)	22	5	110	8	64	320
Σύνολο		50	700			800

$$\text{Είναι } s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{1}{50} \cdot 800 = 16.$$

Γ.4. Για την τυπική απόκλιση είναι  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$  και για τον συντελεστή μεταβολής CV έχουμε:

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}, \text{ επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

### ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad D_f = \mathbb{R}^*$$

$$\Delta.1. \quad f'(x) = \frac{(-1)' \cdot x^2 - (-1)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{0 + 1 \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}, \quad D_{f'} = \mathbb{R}^*$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} < 0 \Leftrightarrow x^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f$	$\searrow$		$\nearrow$

Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0)$

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$

$$\Delta.2. \quad -4 \leq x \leq -1 \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(-4) \geq f(x) \geq f(-1) \Leftrightarrow -\frac{1}{(-4)^2} \geq f(x) \geq -\frac{1}{(-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{16} \geq f(x) \geq -1 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

β' τρόπος

$$-4 \leq x \leq -1 < 0 \Rightarrow (-4)^2 \geq x^2 \geq (-1)^2 \Leftrightarrow 0 < 1 \leq x^2 \leq 16 \Leftrightarrow \frac{1}{1} \geq \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{x^2} \leq -\frac{1}{16} \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

Δ.3. Ψάχνουμε εξίσωση της μορφής  $y = \lambda x + \beta$  όπου  $\lambda = f'(1)$ , άρα  $\lambda = \frac{2}{1^3} = 2$

Επομένως έχουμε  $y = 2x + \beta$  και  $f(1) = 1$

Το σημείο  $(1, -1)$  επαληθεύει την εξίσωση άρα  $-1 = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$

Επομένως η εξίσωση εφαπτομένης είναι η  $y = 2x - 3$

Δ.4.  $\bar{x} = 4$  και  $s_x = 2$

Έχουμε  $y_i = 2x_i - 3$  με  $i = 1, 2, 3$

Οπότε από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, σελ. 99

$$\bar{y} = 2\bar{x} - 3 \Rightarrow \bar{y} = 2 \cdot 4 - 3 \Rightarrow \bar{y} = 5$$

$$s_y = |2| \cdot s_x = 2 \cdot 2 = 4$$

Επομένως έχουμε  $CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{5} = 0,8$



Φροντιστήριο  
ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ