Μάθημα / Τάξη **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

Ημερομηνία 25/02/2024

Επιμέλεια Διαγωνίσματος ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) του κύκλου $(C): x^2+y^2=\rho^2$, σε ένα σημείο του $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, έχει εξίσωση $\varepsilon: xx_1+yy_1=\rho^2$. Μ.15

Θεωρία από σχολικό βιβλίο, σελ. 83

Α.2. Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό** ή **Λάθος**, τις παρακάτω προτάσεις: Μ.5x2=10

α) Η εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ παριστάνει ευθεία αν και μόνο αν ισχύει $\mathrm{A}\neq 0$ ή $\mathrm{B}\neq 0$.

β) Κάθε ευθεία (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει εξίσωση $\varepsilon: y=\lambda\cdot x$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Η απόσταση του σημείου $\mathrm{M}(x_{\mathrm{M}}, y_{\mathrm{M}})$ από την ευθεία ε με εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ δίνεται από τον τύπο $d(\mathrm{M},\varepsilon)=\dfrac{\mathrm{A}x_{\mathrm{M}}+\mathrm{B}y_{\mathrm{M}}+\Gamma}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$.

δ) Το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ δίνεται από τον τύπο $(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|$.

ε) Η εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν ισχύει $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$.

α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ με εξισώσεις $\varepsilon_1: 2x+y-3=0,\ \varepsilon_2: x-2y+1=0$ αντίστοιχα και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u}=(-2,1)$, έχει εξίσωση $\varepsilon: y=2x-1$. Μ.7

Για να βρούμε το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους:

$$(\Sigma)\begin{cases}2x+y-3=0\\x-2y+1=0\end{cases}\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}\begin{cases}4x+2y-6=0\\x-2y+1=0\end{cases}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}5x-5=0\\x-2y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\1-2y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$$

Άρα $\varepsilon_1\cap\varepsilon_2: \mathrm{M}(1,1)$ Μ.2

$\vec{u}=(-2,1)$ άρα $\lambda_{\vec{u}}=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$

$\varepsilon\perp\vec{u}$ άρα $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\vec{u}}=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=2$ Μ.2

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{M}(1,1)\in\varepsilon\\ \lambda_\varepsilon=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow \varepsilon\xi.\varepsilon: y-1=2(x-1)\ \text{ή}\ \varepsilon\xi.\varepsilon: y=2x-1$$ Μ.3

Β.2. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες συντεταγμένων. Μ.6

Για $y=0\overset{\varepsilon}{\Rightarrow}2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ άρα $\varepsilon\cap x'x: \mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ Μ.1

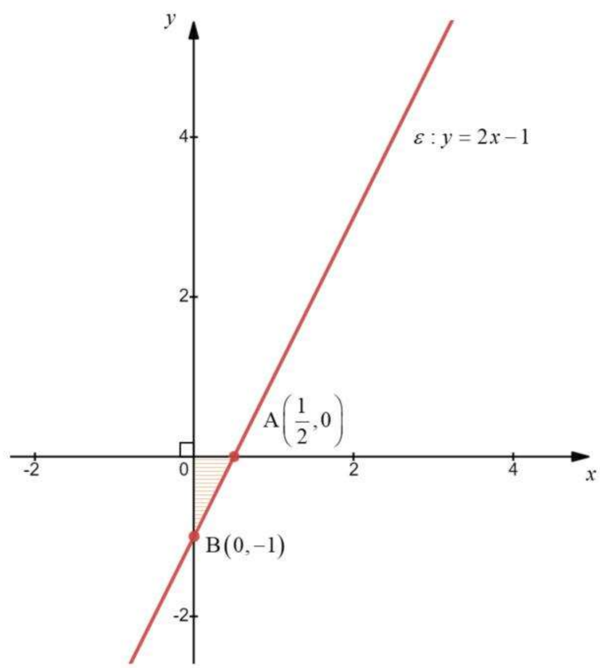
Για $x=0\overset{\varepsilon}{\Rightarrow}y=-1$ άρα $\varepsilon\cap y'y: \mathrm{B}(0,-1)$ Μ.1

Αν $\mathrm{O}(0,0)$ τότε $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\dfrac{1}{2}-0,0-0\right)=\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ Μ.1

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0-0,-1-0)=(0,-1)$ Μ.1

$$(\mathrm{OAB})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&-1\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\ \text{τ.μον.}$$ Μ.2



B.3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) και απέχει από αυτήν απόσταση $d(\zeta,\varepsilon)=\sqrt{5}$. M.6

Αφού $\zeta \parallel \varepsilon$ έχουμε ότι $\lambda_\zeta=\lambda_\varepsilon=2$

Άρα η ζητούμενη ευθεία θα έχει εξίσωση $\zeta: y=2x+\beta$ με $\beta\in\mathbb{R}$ M.1

$$d(\zeta,\varepsilon)=\sqrt{5}\Leftrightarrow \frac{|\beta-(-1)|}{\sqrt{2^2+1}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow \frac{|\beta+1|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow |\beta+1|=\sqrt{5}^2\Leftrightarrow|\beta+1|=5$$ M.1

$$|\beta+1|=5 \begin{cases} \beta+1=5\Leftrightarrow\beta=4\overset{\zeta}{\Rightarrow}\zeta_1: y=2x+4 \\ \acute{\eta} \\ \beta+1=-5\Leftrightarrow\beta=-6\overset{\zeta}{\Rightarrow}\zeta_2: y=2x-6 \end{cases}$$ M.2 M.2

B.4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας (ε_1) με τον άξονα $y'y$ και εφάπτεται στην ευθεία (ε). M.6

Για $x=0\overset{\varepsilon_1}{\Rightarrow}y-3=0\Leftrightarrow y=3$ άρα $\varepsilon_1\cap y'y: \mathrm{K}(0,3)$ M.1

Αφού ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία (ε) θα ισχύει $d(\mathrm{K},\varepsilon)=\rho$ M.1

$\varepsilon: y=2x-1$ ή $\varepsilon: 2x-y-1=0$

$$\rho=d(\mathrm{K},\varepsilon)=\frac{|2\cdot0-1\cdot3-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-3-1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$ M.2

Άρα ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση $C: x^2+(y+3)^2=\frac{16}{5}$ M.2

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(-1)+2f''(1)=16$. Να βείτε τον αριθμό α. M.5

$$f(x)=x^3+\alpha x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

$$f'(x)=\left(x^3+\alpha x^2-x+1\right)'=3x^2+2\alpha x-1,\ \ x\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}$$ M.1

$$f''(x)=\left(3x^2+2\alpha x-1\right)'=6x+2\alpha,\ \ x\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}$$ M.1

$$f'(-1)=3(-1)^2+2\alpha(-1)-1=3-2\alpha-1=2-2\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

$$f''(1)=6\cdot 1+2\alpha=2\alpha+6,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

$$f'(-1)+2f''(1)=16\Leftrightarrow 2-2\alpha+2(2\alpha+6)=16\ \Leftrightarrow\ 2-2\alpha+4\alpha+12=16\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha+14=16\ \Leftrightarrow 2\alpha=2\Leftrightarrow \alpha=1$$ M.3

Αφού $\alpha=1$ έχουμε ότι:

$$f(x)=x^3+x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$$

$$f'(x)=3x^2+2x-1,\ \ x\in\mathbb{R}$$

$$f''(x)=6x+2,\ \ x\in\mathbb{R}$$

Για $\alpha=1$

Γ.2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)+f''(-1)}{f(x)-2f(0)}$. M.5

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)+f''(-1)}{f(x)-2f(0)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-1+(-6+2)}{x^3+x^2-x+1-2\cdot 1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{x^3+x^2-x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-2-3}{\left(x^3+x^2\right)-(x+1)}=$$ M.1

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x^2-1\right)+2(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+1)+2(x-1)}{(x+1)\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left[3(x+1)+2\right]}{(x+1)(x+1)\cancel{(x-1)}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+1)+2}{(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+5}{(x+1)^2}=\frac{3\cdot 1+5}{(1+1)^2}=\frac{8}{4}=2$$ M.4

Γ.3. Αν $g(x)=2\eta\mu x\cdot f''(x)-\dfrac{f(x)+x-1}{f'(x)-2x+2}$, $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε την συνάρτηση $g'(x)$. Μ. 7

$$g(x)=2\eta\mu x\cdot f''(x)-\frac{f(x)+x-1}{f'(x)-2x+2}=\ 2\eta\mu x\cdot(6x+2)-\frac{x^3+x^2\cancel{-x}\cancel{+1}\cancel{+x}\cancel{-1}}{3x^2\cancel{+2x}-1\cancel{-2x}+2}=$$

$$=4\eta\mu x(3x+1)-\frac{x^3+x^2}{3x^2+1},\ x\in\mathbb{R} \quad \text{Μ.2}$$

$$g'(x)=\left(4\eta\mu x(3x+1)-\frac{x^3+x^2}{3x^2+1}\right)'=\ \left(4\eta\mu x(3x+1)\right)'-\left(\frac{x^3+x^2}{3x^2+1}\right)'= \quad \text{Μ.1}$$

$$=(4\eta\mu x)'(3x+1)+(4\eta\mu x)(3x+1)'-\frac{\left(x^3+x^2\right)'\left(3x^2+1\right)-\left(x^3+x^2\right)\left(3x^2+1\right)'}{\left(3x^2+1\right)^2}= \quad \text{Μ.2}$$

$$=4\sigma\upsilon\nu x(3x+1)+(4\eta\mu x)\cdot 3-\frac{\left(3x^2+2x\right)\left(3x^2+1\right)-\left(x^3+x^2\right)6x}{\left(3x^2+1\right)^2}=$$

$$=4\sigma\upsilon\nu x(3x+1)+12\eta\mu x-\frac{9x^4+3x^2\cancel{+6x^3}+2x-6x^4\cancel{-6x^3}}{\left(3x^2+1\right)^2}=$$

$$=4\sigma\upsilon\nu x(3x+1)+12\eta\mu x-\frac{3x^4+3x^2+2x}{\left(3x^2+1\right)^2},\ x\in\mathbb{R} \quad \text{Μ.2}$$

Γ.4. *α)* Να βρείτε τις εξισώσεις εφαπτομένων της C_f που είναι κάθετες στην ευθεία (ζ) με εξίσωση $\zeta: x+4y-2024=0$.

β) Να βρείτε τις εξισώσεις εφαπτομένων της $C_{f'}$, όπου $C_{f'}$ η γραφική παράσταση της παραγώγου της f, που διέρχονται από το σημείο $\mathrm{M}(0,-4)$. Μ. 4+4 = 8

α) Έστω $\mathrm{A}(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτόμενης (ε).

Τότε $\lambda_\varepsilon=f'(x_0)$

$\zeta: x+4y-2024=0$ άρα $\zeta: y=-\dfrac{1}{4}x+506$ άρα $\lambda_\zeta=-\dfrac{1}{4}$

$\varepsilon\perp\zeta$ άρα

$$\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\zeta=-1\Leftrightarrow f'(x_0)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-1 \quad \text{Μ.1} \quad \Leftrightarrow\ f'(x_0)=4\Leftrightarrow 3{x_0}^2+2x_0-1=4\Leftrightarrow 3{x_0}^2+2x_0-5=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_0=1 \\ \acute{\eta} \\ x_0=-\dfrac{5}{3}\end{cases} \quad \text{Μ.1}$$

Αν $x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = f(1) = 1^3 + 1^2 - 1 + 1 = 2$ και $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 4$

Άρα $\mathrm{A}(1,2)$ και η ζητούμενη εφαπτομένη θα έχει εξίσωση:

$\varepsilon_1 : y - f(1) = f'(1)(x-1)$ ή $\varepsilon_1 : y - 2 = 4(x-1)$ ή $\varepsilon_1 : y = 4x - 2$ M.1

Αν $x_0 = -\frac{5}{3} \Rightarrow f(x_0) = f\left(-\frac{5}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - \left(-\frac{5}{3}\right) + 1 = -\frac{125}{27} + \frac{25}{9} + \frac{5}{3} + 1 =$

$$= \frac{-125 + 3 \cdot 25 + 9 \cdot 5 + 1 \cdot 27}{27} = \frac{-125 + 75 + 45 + 27}{27} = \frac{22}{27}$$

Άρα $\mathrm{A}\left(-\frac{5}{3}, \frac{22}{27}\right)$ και $f'\left(-\frac{5}{3}\right) = 4$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη θα έχει εξίσωση:

$\varepsilon_2 : y - f\left(-\frac{5}{3}\right) = f'\left(-\frac{5}{3}\right)\left(x + \frac{5}{3}\right)$ ή $\varepsilon_2 : y - \frac{22}{27} = 4\left(x + \frac{5}{3}\right)$ ή $\varepsilon_2 : y = 4x + \frac{202}{27}$ M.1

β) Έστω $\mathrm{B}(x_1, f'(x_1))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης (ε_1). Η εξίσωσή της θα είναι:

$$\varepsilon_1 : y - f'(x_1) = f''(x_1)(x - x_1)$$
$$\varepsilon_1 : y - \left(3x_1^2 + 2x_1 - 1\right) = (6x_1 + 2)(x - x_1)$$
$$\varepsilon_1 : y = (6x_1 + 2)x + 3x_1^2 + 2x_1 - 1 - 6x_1^2 - 2x_1$$
$$\varepsilon_1 : y = (6x_1 + 2)x - 3x_1^2 - 1$$ M.1

Από υπόθεση ισχύει $\mathrm{M}(0,-4) \in \varepsilon_1$ οπότε:

$\mathrm{M}(0,-4) \in \varepsilon_1 \Leftrightarrow -4 = (6x_1 + 2) \cdot 0 - 3x_1^2 - 1 \Leftrightarrow -4 = -3x_1^2 - 1 \Leftrightarrow 3x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1$ M.1

Για $x_1 = 1 \overset{\varepsilon_1}{\Rightarrow} y = 8x - 4$ M.1

Για $x_1 = -1 \overset{\varepsilon_1}{\Rightarrow} y = -4x - 4$ M.1

που είναι οι ζητούμενες εξισώσεις εφαπτομένων της $C_{f'}$ που διέρχονται από το σημείο $\mathrm{M}(0,-4)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι εξισώσεις:

$$(\mathrm{E}_1): x^2+y^2+2kx-4ky-1=0 \quad \text{όπου} \quad k\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad (\mathrm{E}_2): k(x+y)-y+\lambda^2+1=0 \quad \text{όπου} \quad k,\lambda\in\mathbb{R}$$

Δ.1. Να δείξετε ότι η εξίσωση (E_1) παριστάνει κύκλο για κάθε $k\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του ρ συναρτήσει του k. Μ. 6

$$(\mathrm{E}_1): x^2+y^2+2kx-4ky-1=0$$

Η εξίσωση (E_1) είναι της μορφής $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ όπου $\mathrm{A}=2k,\ \mathrm{B}=-4k,\ \Gamma=-1$ Μ.1

Για να παριστάνει κύκλο πρέπει και αρκεί $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$ Μ.1

$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=(2k)^2+(-4k)^2-4\cdot(-1)=4k^2+16k^2+4=20k^2+4>0$ για κάθε $k\in\mathbb{R}$ Μ.1

Άρα η εξίσωση (E_1) παριστάνει για κάθε $k\in\mathbb{R}$ κύκλο

με κέντρο $\mathrm{K}\left(-\frac{\mathrm{A}}{2},-\frac{\mathrm{B}}{2}\right)$ ή $\mathrm{K}\left(-\frac{2k}{2},-\frac{-4k}{2}\right)$ ή $\mathrm{K}(-k,2k)$ Μ.1

και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{20k^2+4}}{2}=\frac{\sqrt{4(5k^2+1)}}{2}=\frac{\sqrt{4}\sqrt{5k^2+1}}{2}=\sqrt{5k^2+1}$ Μ.2

Δ.2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του $k\in\mathbb{R}$. Μ. 5

$\mathrm{K}(-k,2k)$ με $k\in\mathbb{R}$

Έστω $\mathrm{K}(x_k,y_k)$ άρα $\begin{cases} x_k=-k \\ y_k=2k \end{cases} \Rightarrow y_k=-2x_k$ Μ.2

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων θα είναι η ευθεία $\varepsilon: y=-2x$ Μ.3
επειδή οι συντεταγμένες του κέντρου επαληθεύουν την εξίσωσή και αφού $k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -x_k\in\mathbb{R}$
Άρα $x_k\in\mathbb{R}$.

Δ.3. Αν $\rho=\sqrt{6}$ και $k>0$, να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που σχηματίζουν γωνία $\hat{\omega}=45^o$ με τον άξονα $x'x$. Μ. 7

$$\rho=\sqrt{6}\Leftrightarrow\sqrt{5k^2+1}=\sqrt{6}\Leftrightarrow\sqrt{5k^2+1}^2=\sqrt{6}^2\Leftrightarrow 5k^2+1=6\Leftrightarrow 5k^2=5\Leftrightarrow k^2=1\overset{k>0}{\Leftrightarrow}k=1$$ Μ.1

Άρα το κέντρο του κύκλου θα είναι $\mathrm{K}(-1,2)$ και η ακτίνα του $\rho=\sqrt{6}$,

οπότε η εξίσωσή του θα είναι $C:(x+1)^2+(y-2)^2=6$

Έστω (ε) η ζητούμενη εφαπτομένη του κύκλου, τότε $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi 45^o = 1$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη (ε) θα έχει εξίσωση

$$\varepsilon : y = x + \beta,\ \beta \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad \varepsilon : x - y + \beta = 0,\ \beta \in \mathbb{R}$$ Μ.1

Αφού η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου (C) θα ισχύει $d(\mathrm{K},\varepsilon) = \rho$ Μ.1 άρα

$$d(\mathrm{K},\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|1\cdot(-1) - 1\cdot 2 + \beta|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|\beta - 3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow |\beta - 3| = \sqrt{6}\sqrt{2} \Leftrightarrow |\beta - 3| = \sqrt{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\beta - 3| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta - 3 = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \beta = 3 + 2\sqrt{3} \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} \varepsilon_1 : y = x + 3 + 2\sqrt{3} \\ \text{ή} \\ \beta - 3 = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow \beta = 3 - 2\sqrt{3} \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} \varepsilon_2 : y = x + 3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$ Μ.2 Μ.2

Δ.4. *α)* Να δείξετε ότι η εξίσωση (E_2) παριστάνει ευθεία για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς k, λ, αν η παραπάνω ευθεία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου του ερωτήματος Δ1. Μ. 3+4 = 7

α) $(\mathrm{E}_2): k(x+y) - y + \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow kx + ky - y + \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow kx + (k-1)y + \lambda^2 + 1 = 0$

Η εξίσωση (E_2) είναι της μορφής $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ όπου $\mathrm{A} = k,\ \mathrm{B} = k - 1,\ \Gamma = \lambda^2 + 1$ Μ.1

Για να παριστάνει ευθεία πρέπει και αρκεί $\mathrm{A} \neq 0$ ή $\mathrm{B} \neq 0$ Μ.1

$$(\Sigma)\begin{cases} \mathrm{A} = 0 \\ \mathrm{B} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases}$$

Άρα το (Σ) είναι αδύνατο. Άρα για κάθε $k \in \mathbb{R}$ ισχύει $\mathrm{A} \neq 0$ ή $\mathrm{B} \neq 0$, οπότε η εξίσωση (E_2) παριστάνει ευθεία για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{R}$. Μ.1

β) Αφού η ευθεία διέρχεται από το κέντρο $\mathrm{K}(-k, 2k)$ του κύκλου οι συντεταγμένες του κέντρου θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Μ.1

Άρα θα ισχύει

Μ.1

$$k(-k) + (k-1)2k + \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -k^2 + 2k^2 - 2k + \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k-1)^2 + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k - 1 = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$ Μ.2