



## Μάθημα / Τάξη

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία

25/02/2024

Επιμέλεια Διαγωνίσματος

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΤΜΗΜΑ

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A.1.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) του κύκλου ( $C$ ):  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , σε ένα σημείο του  $A(x_1, y_1)$ , έχει εξίσωση  $\varepsilon: xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .

(μονάδες 15)

**A.1.** Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό** ή **Λάθος**, τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει ευθεία αν και μόνο αν ισχύει  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$ .

β) Κάθε ευθεία ( $\varepsilon$ ) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει εξίσωση  $\varepsilon: y = \lambda \cdot x$  όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

γ) Η απόσταση του σημείου  $M(x_M, y_M)$  από την ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  δίνεται από

$$\text{τον τύπο } d(M, \varepsilon) = \frac{Ax_M + By_M + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

δ) Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  δίνεται από τον τύπο  $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overline{AB} \\ \overline{A\Gamma} \end{pmatrix} \right|$ .

ε) Η εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν ισχύει  $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ .

(μονάδες  $5 \times 2 = 10$ )

#### ΘΕΜΑ Β

**B.1.** Να δείξετε ότι η ευθεία ( $\varepsilon$ ) που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  με εξισώσεις  $\varepsilon_1: 2x + y - 3 = 0$ ,  $\varepsilon_2: x - 2y + 1 = 0$  αντίστοιχα και είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{u} = (-2, 1)$ , έχει εξίσωση  $\varepsilon: y = 2x - 1$ .

(μονάδες 7)

**B.2.** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ( $\varepsilon$ ) με τους άξονες συντεταγμένων.

(μονάδες 6)

**B.3.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ( $\zeta$ ) που είναι παράλληλη στην ευθεία ( $\varepsilon$ ) και απέχει από αυτήν απόσταση  $d(\zeta, \varepsilon) = \sqrt{5}$ .

(μονάδες 6)

**B.4.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας  $(\varepsilon_1)$  με τον άξονα  $y'y$  και εφάπτεται στην ευθεία ( $\varepsilon$ ).

(μονάδες 6)



**ΘΕΜΑ Γ**

Γ.1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $f'(-1) + 2f''(1) = 16$ . Να βρείτε τον αριθμό  $\alpha$ .

(μονάδες 5)

Για  $\alpha = 1$

Γ.2. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(-1)}{f(x) - 2f(0)}$ .

(μονάδες 5)

Γ.3. Αν  $g(x) = 2\eta\mu x \cdot f''(x) - \frac{f(x) + x - 1}{f'(x) - 2x + 2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να βρείτε την συνάρτηση  $g'(x)$ .

(μονάδες 7)

Γ.4. α) Να βρείτε τις εξισώσεις εφαπτομένων της  $C_f$  που είναι κάθετες στην ευθεία ( $\zeta$ ) με εξίσωση  $\zeta: x + 4y - 2024 = 0$ .

β) Να βρείτε τις εξισώσεις εφαπτομένων της  $C_{f'}$ , όπου  $C_{f'}$  η γραφική παράσταση της παραγώγου της  $f$ , που διέρχονται από το σημείο  $M(0, -4)$ .

(μονάδες 4+4 = 8)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι εξισώσεις:

$(E_1): x^2 + y^2 + 2kx - 4ky - 1 = 0$  όπου  $k \in \mathbb{R}$  και  $(E_2): k(x+y) - y + \lambda^2 + 1 = 0$  όπου  $k, \lambda \in \mathbb{R}$

Δ.1. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $(E_1)$  παριστάνει κύκλο για κάθε  $k \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα του  $\rho$  συναρτήσει του  $k$ .

(μονάδες 6)

Δ.2. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του  $k \in \mathbb{R}$ .

(μονάδες 5)

Δ.3. Αν  $\rho = \sqrt{6}$  και  $k > 0$ , να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που σχηματίζουν γωνία  $\hat{\omega} = 45^\circ$  με τον άξονα  $x'x$ .

(μονάδες 7)

Δ.4. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $(E_2)$  παριστάνει ευθεία για κάθε  $k, \lambda \in \mathbb{R}$ .

β) Να βρείτε τους αριθμούς  $k, \lambda$ , αν η παραπάνω ευθεία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου του ερωτήματος Δ1.

(μονάδες 3+4 = 7)

Ευχόμαστε επιτυχία!