Μάθημα / Τάξη

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΡΙΝΑ

Ημερομηνία

10/03/2024

Επιμέλεια Διαγωνίσματος

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΤΜΗΜΑ

<u>ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α.1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.

(μονάδες 3+5 = 8)

Α.2. Να αναφέρετε ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ.

(μονάδες 4)

Α.3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

(μονάδες 3)

Α.4. Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό** ή **Λάθος**, τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \beta$ όπου $\beta \in \mathbb{R}$, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = \beta$ θα είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) Αν ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$ θα είναι σημείο καμπής της C_f.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\alpha f(x)dx = 0$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $\gamma \notin [\alpha, \beta]$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$.

ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > 0$, τότε ισχύει $\int_\beta^\alpha f(x)dx < 0$.

(μονάδες 5 x 2 = 10)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x},\ x\neq 0$.

Β.1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(μονάδες 3+3 = 6)

Β.2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

(μονάδες 4)

Β.3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

(μονάδες 5)

Β.4. Να σχεδιάσετε πρόχειρα την C_f.

(μονάδες 5)

Β.5. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $x^2-kx-4=0$ όπου $x\neq 0$, για τις διάφορες τιμές του $k\in\mathbb{R}$.

(μονάδες 5)

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ.1. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με τύπο $f(x)=\dfrac{\alpha^x}{x}$, όπου $\alpha\in(0,+\infty)$.

Αν για κάθε $x>0$ ισχύει $e^{f(x)-\alpha}-1\geq 0$, να δείξετε ότι $\alpha=e$.

(μονάδες 6)

Για $f(x)=\dfrac{e^x}{x},\ x>0$ και $g(x)=\ln\left(f(x)\right),\ x>0$

Γ.2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, έχει εξίσωση

$\varepsilon: y=\dfrac{e^2}{4}\cdot x$.

(μονάδες 6)

Γ.3. *α)* Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $4e^{x-2}-x^2\geq 0$.

(μονάδες 4+3 = 7)

Γ.4. Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ και $k>0$ ισχύει $2g(x+k)<g(x)+g(x+2k)$.

(μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύει $x\cdot e^{f(x)-1}=\ln e^{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

Δ.1. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}+1,\ x>0$.

(μονάδες 5)

Δ.2. *α)* Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

β) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο όπου αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y=2x-2$.

(μονάδες 2+3 = 5)

Δ.3. Να λύσετε την εξίσωση $x^x=e^{1+2x^2-3x}$ όπου $x>0$.

(μονάδες 5)

Δ.4. Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ με $\alpha<\beta$ ισχύει $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha\cdot\beta}<e^{\beta-\alpha}$.

(μονάδες 5)

Δ.5. Ένα σημείο $\mathrm{M}(x_{\mathrm{M}},y_{\mathrm{M}})$ με $x_{\mathrm{M}}>1$ κινείται στην εφαπτομένη της C_f στο σημείο όπου αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$ και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $x'_{\mathrm{M}}(t)=2\ {}^{cm}/_{\sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\mathrm{O}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{N}$, όπου $\mathrm{O}(0,0)$ και N η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$, την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το x_{M} είναι ίσο με την τετμημένη του μεγίστου της συνάρτησης $t(x)=f'(x)+f''(x),\ x>0$.

(μονάδες 5)

Ευχόμαστε επιτυχία!